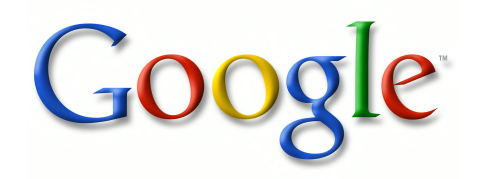
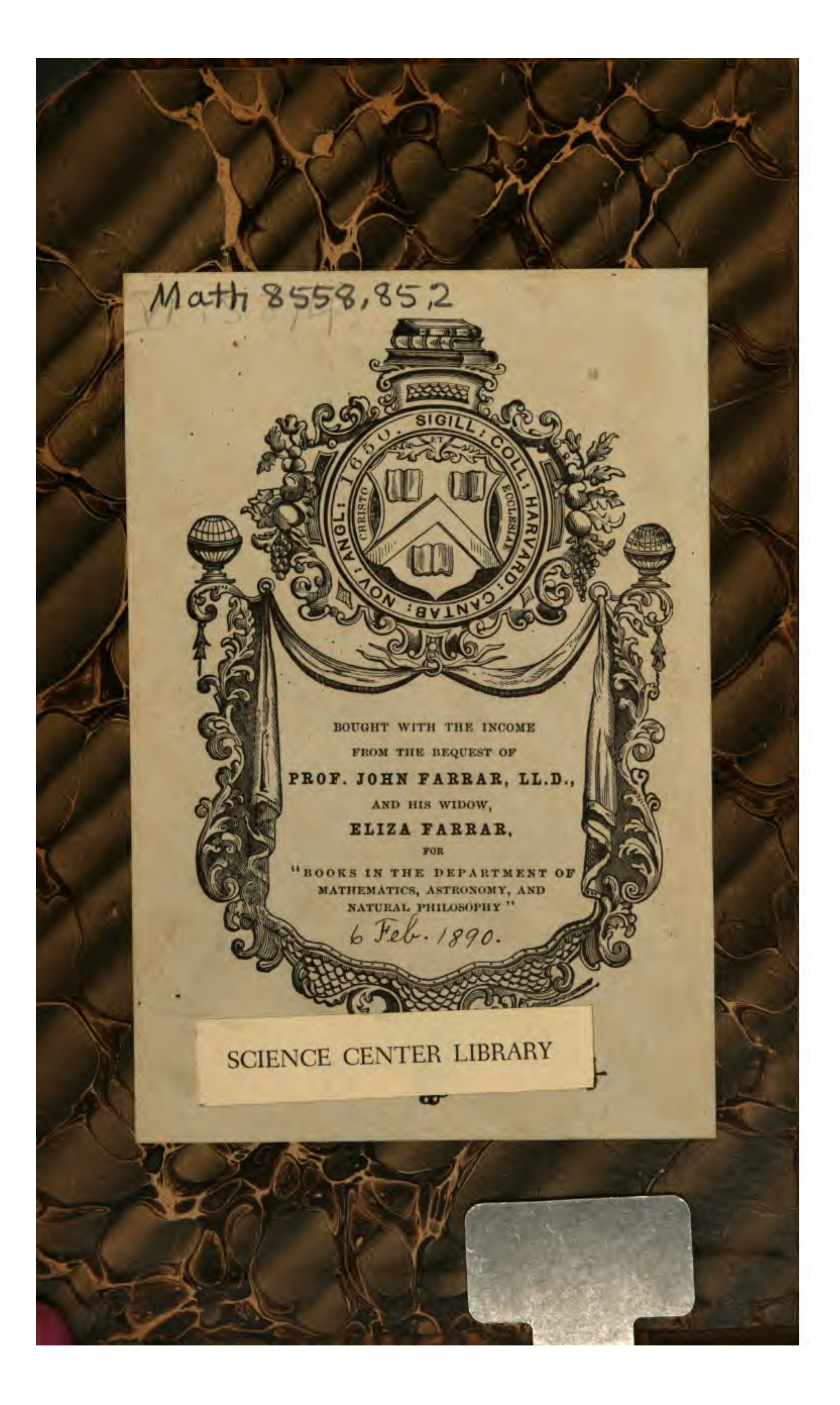
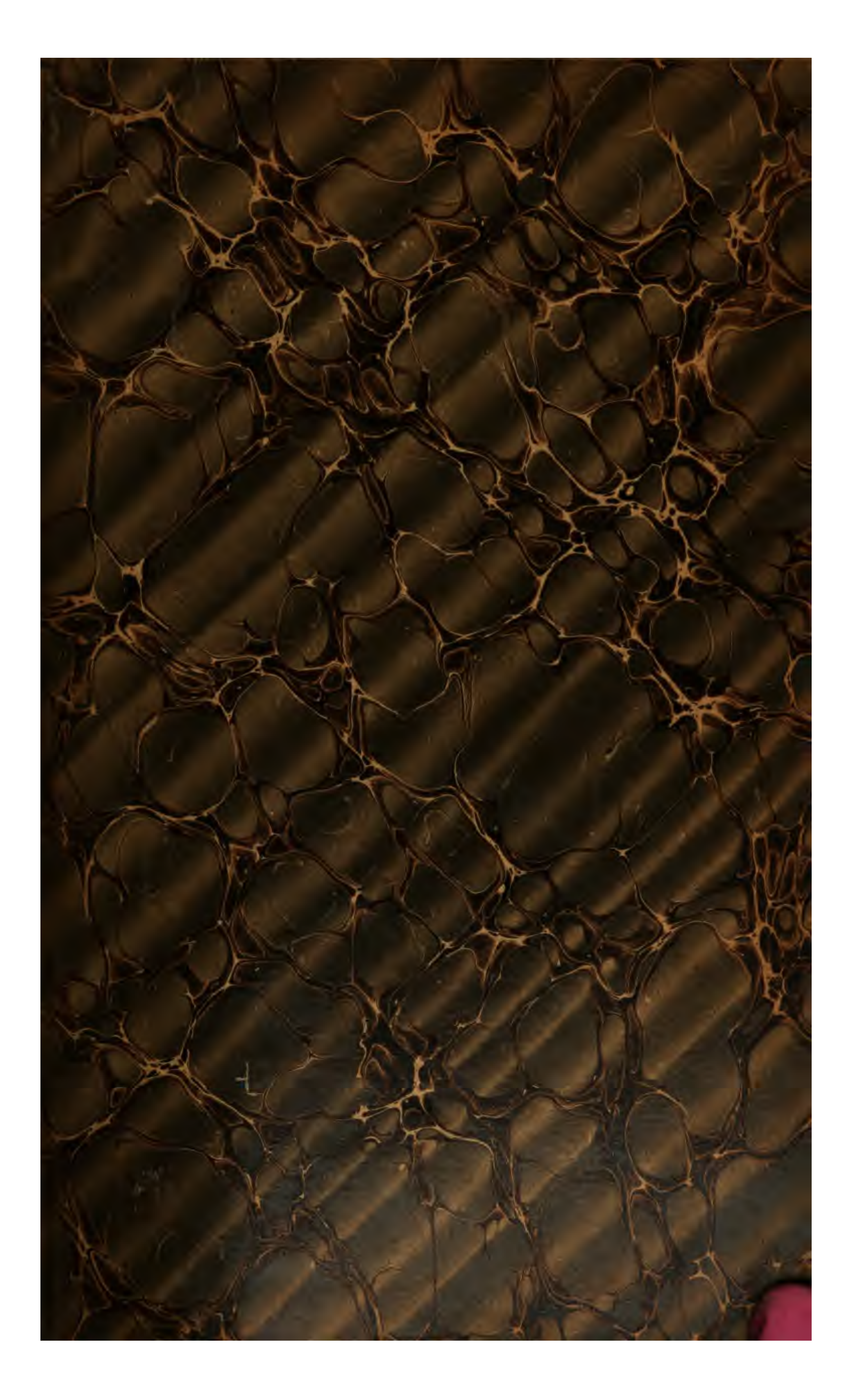





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE



RECHERCHES

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE DIRECTION.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

RECHERCHES

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE DIRECTION.

MÉTHODES DE TRANSFORMATION.
ANTICAUSTIQUES.

PAR

Edmond (Nicolas)

E. LAGUERRE,

MEMBRE DE L'INSTITUT.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1885

GÉOMÉTRIE DE DIRECTION.

APPLICATIONS AUX COURBES PLANES,

ET, EN PARTICULIER,

A LA THÉORIE DES CAUSTIQUES ET DES ANTICAUSTIQUES.

I.

Sur la règle des signes en Géométrie.

1. Lorsque, dans une figure, l'on a à considérer des segments comptés sur une même droite, ou des angles ayant même sommet, tous les géomètres ont reconnu l'utilité et la nécessité d'affecter un signe à ces segments et à ces angles; le *Cours de Géométrie supérieure* de M. Chasles offre un exemple des nombreux avantages que l'emploi de la règle des signes a ainsi introduits dans la Science.

Mais, lorsque l'on considère des segments comptés sur des droites différentes ou des angles n'ayant pas le même sommet, il semble généralement admis que la règle des signes n'est plus applicable. M. Chasles, dans la Préface de son Cours, exprime formellement cette idée :

« Si l'on ne démontre ordinairement, dit-il (Préface de la *Géométrie supérieure,* p. IX), une formule ou une relation que par une certaine figure, et non dans l'état d'abstraction et de généralité qui permettrait, au moyen des signes + et — affectés aux segments et aux angles, pour marquer leur direction, de l'adapter à tous les états

de la figure, il est facile d'en reconnaître la raison. C'est que les propositions qui forment le plus ordinairement les éléments de démonstration, dans la Géométrie ancienne, ne comportent pas l'application du principe des signes. Telles sont la proportionnalité des côtés homologues dans les triangles semblables, *celle encore de la proportionnalité, dans tout triangle, des côtés aux sinus des angles opposés. La règle des signes ne s'applique point à ces propositions, puisque les segments que l'on y considère sont formés sur des lignes différentes, et les angles autour de sommets différents.* »

Je me propose de faire voir, dans cette Note, que, contrairement à l'idée émise par l'illustre géomètre, la règle des signes s'applique à tous les théorèmes de Géométrie sans exception.

Je me bornerai à examiner, sous ce point de vue, la dernière des propositions mentionnées dans la citation que j'ai reproduite ci-dessus. Les considérations très simples qui, dans ce cas, résolvent la question, s'étendent d'elles-mêmes à toutes les autres propositions; ce théorème, d'ailleurs, est l'un de ceux dont l'usage est le plus fréquent pour établir les relations qui existent entre des segments comptés sur des droites différentes, en sorte qu'il suffit presque d'établir, relativement à ce théorème, la règle des signes pour légitimer d'une façon générale l'emploi de cette règle.

2. Étant donnés un certain nombre de points situés sur une même droite, on peut assigner à cette droite un certain sens positif, en admettant qu'un point mobile, qui se mouvrait dans ce cas sur la droite, parcourt des longueurs positives. Cette assignation pourra, dans la plupart des cas, être faite arbitrairement; dans d'autres cas, au contraire, elle devra être faite d'une manière déter-

minée, en sorte que cette détermination elle-même sera une partie essentielle de la proposition de Géométrie que l'on aura à considérer.

Quoi qu'il en soit, cette assignation une fois faite, pour éviter toute confusion, je désignerai une droite sur laquelle on aura fixé le sens positif sous le nom de *direction*. Deux points A et B, se trouvant sur une direction donnée d, le segment AB a un signe parfaitement déterminé, et il est clair que ce signe change quand on change la direction de d.

Étant données deux directions a et b, l'angle (a, b) que fait la direction a avec la direction b est l'angle dont il faut faire tourner a autour de l'intersection des deux droites jusqu'à ce que les deux directions s'appliquent l'une sur l'autre et soient dirigées dans le même sens. Cet angle, on le voit, est déterminé, à un multiple près d'une circonférence entière; son sinus et son cosinus sont donc aussi parfaitement déterminés.

Étant donné l'angle (a, b) de deux directions, si l'une de ces directions change de sens, l'angle est augmenté d'une demi-circonférence; par conséquent, le sinus et le cosinus de cet angle changent de signe.

3. Cela posé, nous pourrons énoncer de la façon suivante la proposition relative à la proportionnalité des côtés d'un triangle aux sinus des angles opposés.

Proposition. — *Étant donné un triangle* ABC, *si l'on assigne arbitrairement un sens positif aux trois droites qui forment les côtés de ce triangle, et si l'on désigne par* a, b, c *les trois directions ainsi obtenues,* a *étant la direction qui renferme les côtés* B *et* C, *etc., on a les relations suivantes, qui comportent la règle des signes :*

$$\frac{AB}{\sin(a, b)} = \frac{BC}{\sin(b, c)} = \frac{CA}{\sin(c, a)}.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'assigner aux côtés du triangle une direction déterminée : on vérifie facilement l'exactitude des formules ci-dessus. On peut remarquer maintenant que l'on peut, sans qu'elles cessent d'être exactes, prendre un côté quelconque dans un sens inverse à celui que l'on considérait tout d'abord.

Supposons, par exemple, que l'on change le sens de la direction a, BC changera alors de signe, ainsi que $\sin(a, b)$ et $\sin(c, a)$; les autres quantités ne subissant aucun changement, on voit que, dans la série d'égalités précédentes, chaque terme aura changé de signe : l'égalité ne sera donc pas troublée.

4. La proposition précédente étant établie en toute rigueur, je m'en servirai pour démontrer la relation qui existe entre le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites et le rapport anharmonique des quatre points où ce faisceau est coupé par une transversale quelconque.

M. Chasles (*Géométrie supérieure*, § XIII), pour établir cette relation, emploie aussi la proposition précédente; mais comme, pour lui, elle ne comporte pas l'emploi de la règle des signes, il démontre d'abord par son moyen que les deux rapports anharmoniques ont la même valeur absolue; il prouve ensuite, par une considération directe, qu'ils ont le même signe.

Il est facile de voir que le théorème de la proportionnalité des côtés aux sinus suffit pour la démonstration de l'égalité des deux rapports.

Soit un faisceau de quatre droites passant par un même point O; assignons à chacune de ces droites un sens positif arbitraire, et soient a, b, c, d les quatre directions ainsi obtenues. Soient, de plus, A, B, C, D les points où

une transversale quelconque coupe les droites de ce faisceau; donnons à cette transversale un sens positif pris arbitrairement, et appelons ω la direction de cette transversale. Cela posé, en appliquant au triangle OAB la proposition énoncée ci-dessus, il viendra

$$\frac{AB}{OA} = \frac{\sin(b,\ a)}{\sin(\omega,\ b)};$$

de même le triangle OAB donnera

$$\frac{AD}{OA} = \frac{\sin(d,\ a)}{\sin(\omega.\ d)},$$

d'où

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin(b,\ c)}{\sin(\omega,\ b)} \cdot \frac{\sin(\omega,\ d)}{\sin(d,\ a)};$$

on aurait de même

$$\frac{CB}{CD} = \frac{\sin(b,\ c)}{\sin(\omega,\ b)} \cdot \frac{\sin(\omega,\ d)}{\sin(d,\ c)},$$

d'où enfin

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{\sin(a,\ b)}{\sin(a,\ d)} : \frac{\sin(c,\ b)}{\sin(c,\ d)},$$

égalité qui, ainsi que la proposition dont j'étais parti, comporte la règle des signes.

Il est à remarquer que la valeur du rapport anharmonique du faisceau de quatre droites donnée dans le second membre est indépendante du sens positif que l'on a assigné à ces droites; car, si l'on prend en sens contraire l'une de ces directions, la direction a par exemple, $\sin(a, b)$ et $\sin(a, d)$ changeant à la fois de signe, leur rapport reste invariable.

5. Sans multiplier davantage les exemples, j'énoncerai la conclusion suivante :

« Lorsqu'un théorème relatif à des segments et à des angles situés d'une façon quelconque dans un plan est

convenablement et complètement énoncé, il doit toujours comporter la règle des signes. »

Les divers théorèmes se distribuent en deux classes bien distinctes. Pour les uns, on peut choisir d'une façon arbitraire le sens dans lequel est prise la direction positive d'un certain nombre de droites, et alors le sens dans lequel on doit prendre les autres droites de la figure est déterminé par les théorèmes eux-mêmes, et cette détermination en est un élément essentiel : la façon dont elle est faite doit faire partie de l'énoncé lui-même de ces théorèmes.

Pour les autres, et ce sont les plus nombreux, le sens positif que l'on doit attribuer aux diverses droites de la figure est complètement arbitraire; et si les théorèmes sont convenablement énoncés, ils doivent être vérifiés quelle que soit la façon dont on fasse cette attribution.

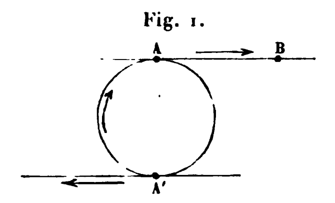
Les considérations qui précèdent ne sont pas sans doute de nature à trouver place dans l'enseignement élémentaire; leur introduction compliquerait souvent et inutilement les questions; néanmoins, comme elles tiennent à un point de doctrine souvent controversé, j'ai cru qu'il n'était pas inutile de les présenter.

II.

Transformations par semi-droites réciproques.

6. Une droite étant donnée, on peut supposer qu'elle soit décrite dans un certain sens par un point mobile; une telle droite, déterminée ainsi par sa position et le sens dans lequel elle est décrite, est désignée sous le nom de *semi-droite;* ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la droite (*fig.* 1).

Fig. 1.



Une même droite pouvant être décrite dans deux sens différents détermine deux semi-droites distinctes, que l'on appelle *semi-droites opposées.*

7. Un cercle étant donné, on peut supposer également qu'il soit décrit dans un certain sens par un point mobile; un tel cercle, déterminé ainsi par sa position et le sens dans lequel il est décrit, est désigné sous le nom de *cycle;* ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la circonférence du cycle.

Un même cercle pouvant être décrit dans deux sens différents détermine deux cycles distincts que l'on appelle *cycles opposés.*

8. En un point A d'un cycle, la tangente doit être

considérée, le long de l'élément infiniment petit commun au cycle, comme décrite dans le même sens que le cycle; la tangente au point A est donc une semi-droite bien déterminée.

De là résultent les conséquences suivantes :

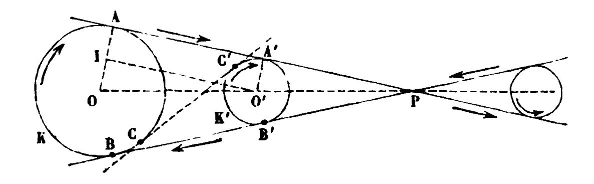
1° *On ne peut mener à un cycle donné qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée.*

Il est clair, en effet, qu'on peut mener au cercle déterminé par le cycle deux tangentes parallèles à la droite déterminée par la semi-droite donnée; mais, si l'on désigne par A et par A' les points de contact de ces tangentes, on voit que les tangentes en ces points ont des directions opposées; une seule d'entre elles est donc parallèle à la semi-droite donnée.

2° *Deux cycles donnés ont deux tangentes communes et n'en ont que deux.*

Sur la *fig.* 2, on voit que les semi-droites AA' et BB' sont tangentes à la fois aux deux cycles K et K'. Les cercles


Fig. 2.



déterminés par ces cycles ont quatre tangentes communes, dont deux sont précisément AA' et BB'; si l'on considère une quelconque des deux autres, par exemple CC', il est aisé de voir que, quel que soit le sens dans lequel on suppose décrite cette droite, elle ne peut toucher les deux cycles donnés, d'après la définition donnée du contact d'un cycle et d'une semi-droite.

Deux cycles ont donc seulement deux tangentes

communes; leur point de rencontre P est le centre de similitude des deux cycles.

Ce centre de similitude est unique ([1]).

La distance AA′, comprise sur l'une des tangentes communes entre les points de contact avec les cycles, est la *distance tangentielle des cycles;* elle n'est déterminée qu'en valeur absolue, mais non en signe.

9. Le rayon d'un cycle sera regardé comme positif si ce cycle est décrit dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, comme négatif dans le cas contraire.

Par suite, en désignant par T la distance tangentielle des deux cycles dont les centres sont O et O′, la *fig.* 2 montre immédiatement que, en désignant par D la distance des centres, on a la relation

$$T^2 = D^2 - (R - R')^2.$$

Cette formule détermine, dans tous les cas possibles, la distance tangentielle de deux cycles; en particulier, si nous considérons deux cycles opposés, le rayon d'un de ces cycles étant R, l'autre est $-R$; d'ailleurs, la distance de leurs centres est nulle; on a donc, dans ce cas,

$$T^2 = -4R^2.$$

10. Une semi-droite étant donnée, ainsi qu'un point P, le cycle qui a pour centre ce point et qui touche la semi-droite est bien déterminé; la distance du point P à la semi-droite est le rayon de ce cycle: elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

([1]) Une proposition bien connue peut, par suite de cette définition, s'énoncer de la façon suivante :

Étant donnés trois cycles, les trois centres de similitude de ces cycles pris deux à deux sont en ligne droite.

11. Un point doit être considéré comme un cycle d'un rayon infiniment petit; toutes les semi-droites passant par ce point doivent être considérées comme tangentes à ce cycle.

12. Étant données deux semi-droites quelconques, on peut construire une infinité de cycles qui leur soient tangents; les centres de ces cycles sont situés sur une même droite que l'on appellera la *bissectrice des semi-droites*.

Si, le point P d'intersection des semi-droites restant fixe, l'angle que font ces semi-droites diminue indéfiniment, en sorte qu'elles tendent toutes les deux à se confondre avec leur bissectrice, les rayons de tous les cycles inscrits diminuent indéfiniment et à la limite se réduisent à des points, tandis que les deux semi-droites deviennent deux semi-droites opposées.

On voit ainsi que les cycles qui touchent deux semi-droites opposées sont les divers points de la droite qu'elles déterminent.

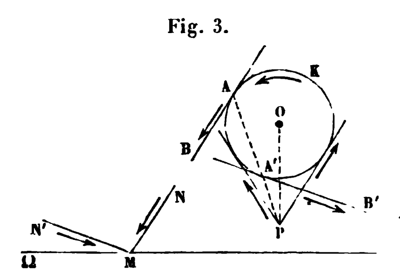
13. Il résulte aussi de ce qui précède qu'un cycle assujetti à toucher trois semi-droites données est entièrement déterminé. Son centre est le point de rencontre des trois bissectrices des semi-droites prises deux à deux.

Méthode de transformation par semi-droites réciproques.

14. Considérons une droite fixe Ω; traçons dans le plan un cycle quelconque K ayant pour centre le point O et, sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite Ω, prenons un point arbitraire P (*fig.* 3).

Cela posé, à chaque semi-droite NM du plan on peut faire correspondre une autre semi-droite de la façon suivante. Menons au cycle K la tangente AB parallèle à MN, joignons le point de contact A au point P, et, au point A'

Fig. 3.



où la droite ainsi obtenue rencontre le cycle, menons la tangente A'B'; menons enfin, par le point M où la semi-droite donnée coupe la droite fixe Ω, une semi-droite N'M parallèle à A'B'.

N'M correspond ainsi à NM, et il est clair, en examinant les constructions effectuées, que NM correspond réciproquement à N'M; on dit que ces deux semi-droites sont réciproques.

Il résulte évidemment de ce qui précède que :

1° *Deux semi-droites réciproques se coupent sur la droite* Ω *que l'on appelle l'*axe de transformation;

2° *Des semi-droites parallèles ont pour réciproques des semi-droites parallèles.*

15. Si, du point P, on mène des tangentes au cycle K, on voit que les semi-droites parallèles à ces tangentes sont leurs réciproques à elles-mêmes. Il y a donc deux séries de semi-droites parallèles qui se transforment en elles-mêmes; ces semi-droites font des angles égaux avec l'axe de transformation. Il est toutefois à remarquer que

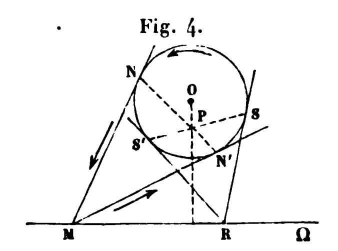
ces semi-droites ne sont réelles que si le point P est extérieur au cycle K.

16. Théorème. — *Deux couples quelconques de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle.*

Soient, en effet, Ω l'axe de transformation, MN et MN′ deux semi-droites réciproques, SK une semi-droite quelconque du plan (*fig.* 4).

Construisons le cycle qui touche les semi-droites NM,

Fig. 4.



MN′ et RS; menons la droite NN′ qui joint les points de contact de NM et de MN′, et désignons par P le point où cette droite coupe la perpendiculaire abaissée du point O sur l'axe Ω. Il est clair, d'après ce qui précède, que la transformation, qui a pour axe Ω et dans laquelle NM correspond à MN′, peut être définie au moyen du cycle K et du point P. Si, maintenant, on remarque que P est le pôle de la droite Ω relativement au cycle K, on voit que la tangente S′R est la réciproque de RS; les deux couples de semi-droites réciproques NM et MN′, RS et S′R sont deux tangentes au cycle K, ce qui démontre la proposition énoncée.

17. La transformation par semi-droites réciproques est aussi caractérisée par les deux propriétés suivantes :

Deux semi-droites réciproques se coupent sur l'axe

de transformation; deux couples de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle [1].

Il est clair que la transformation est entièrement définie quand on se donne l'axe de transformation et deux semi-droites réciproques D et D'. Pour obtenir la réciproque d'une semi-droite quelconque Δ, que l'on construise le cycle tangent à D, D' et Δ, et que, par le point M où Δ coupe l'axe de transformation, on mène la deuxième tangente au cycle, cette tangente sera la semi-droite cherchée.

18. Considérons une courbe K comme l'enveloppe d'une semi-droite mobile Δ, la réciproque Δ' de Δ enveloppera une courbe K' qu'on appelle la *transformée de la courbe* K.

Théorème. — *Quand on effectue une transformation par semi-droites réciproques, un cycle a pour transformé un autre cycle.*

Soit Ω l'axe de transformation, et considérons un cycle quelconque K coupant l'axe aux points A et B. Menons à ce cycle des tangentes MN et N'M' parallèles à la direction des semi-droites qui, dans la transformation, sont leurs réciproques à elles-mêmes, et désignons par P le point de rencontre de ces droites (*fig.* 5).

Cela posé, construisons le second cycle K' qui, passant par les points A et B, touche les semi-droites PM et M'P; je dis que le cycle K' est le transformé de K.

---

[1] La transformation par rayons vecteurs réciproques est également caractérisée par les deux propriétés suivantes :

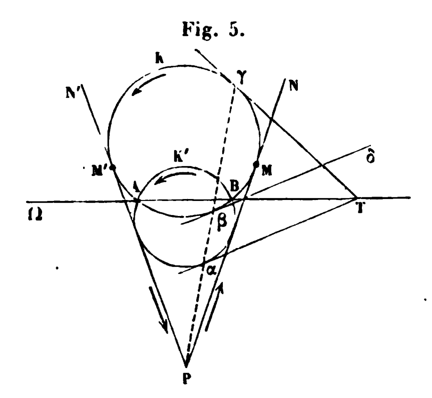
Deux points réciproques sont situés sur une droite passant par le pôle de transformation;

Deux couples de points réciproques sont situés sur un même cercle.

On voit en effet que la transformation est définie par l'axe Ω, le cycle K et le point P (9).

Par le point P, menons une sécante quelconque cou-

Fig. 5.



pant le cycle K' au point α et le cycle K aux points β et γ. On sait que les tangentes menées en α et γ se coupent en un point T de l'axe radical Ω des deux cycles ; d'ailleurs, $\beta\delta$ est parallèle à αT : il résulte donc de la définition donnée plus haut (9) que αT et γT sont deux semi-droites réciproques. L'enveloppe des réciproques des semi-droites qui enveloppent K est donc le cycle K' : ce qu'il fallait démontrer.

19. On voit ainsi qu'un cycle K a pour réciproque un cycle K'. La relation qui existe entre deux cycles réciproques est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

1° *Leur axe radical est l'axe de transformation ;*

2° *Leurs tangentes communes sont parallèles à deux directions fixes,* à savoir aux directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes.

Désignons respectivement par R et R' les rayons des deux cycles (ces quantités étant données en grandeur et

en signe) et par D et D′ les distances de leurs centres à l'axe ([1]).

La première propriété donne la relation suivante :

$$D^2 - D'^2 = R^2 - R'^2,$$

et la deuxième, la relation

$$(1) \qquad D - D' = \alpha(R - R'),$$

où α désigne une constante caractérisant la transformation; d'où encore, en combinant ces deux relations,

$$(2) \qquad D + D' = \frac{1}{\alpha}(R + R').$$

On en déduit

$$D' = \frac{D(\alpha^2 + 1) - 2\alpha R}{1 - \alpha^2}$$

et

$$R' = \frac{2\alpha D - R(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2}.$$

Le cycle K′ est ainsi complètement déterminé, quand le cycle K est donné, puisque l'on connaît la distance de son centre à l'axe et son rayon.

Remarques. — Le cycle K′ se réduit à un point, si $R' = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$R\alpha^2 - 2\alpha D + R = 0,$$

d'où

$$\alpha = D \pm \sqrt{D^2 - R^2}.$$

Il en résulte qu'un cycle étant donné, ainsi que l'axe de transformation, on peut toujours déterminer le mo-

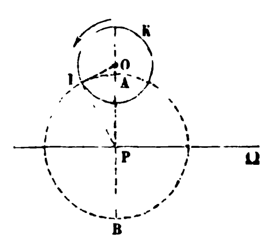
---

([1]) On doit ici considérer l'axe de transformation comme une semi-droite, en lui donnant un sens arbitraire, de sorte que D et D′ sont aussi déterminés en grandeur et en signe.

dule α de la transformation, de façon que ce cycle ait pour transformé un point, dans le cas où ce cycle ne coupe pas l'axe. En désignant, en effet, par R son rayon et par D la distance de son centre à l'axe, on voit que, $D^2 - R^2$ étant positif, l'équation précédente détermine pour le module α deux valeurs réelles.

Soit K (*fig.* 6) le cycle donné; de son centre O abaissons

Fig. 6.



une perpendiculaire OP sur l'axe de transformation, et de son pied P comme centre décrivons le cercle qui coupe orthogonalement le cycle donné. Ce cercle coupe la droite OP en deux points A et B; on prouvera aisément qu'il y existe une transformation telle que les tangentes au cycle K aient pour réciproques les semi-droites qui se croisent au point A. Il y existe également une autre transformation dans laquelle le point B est le réciproque du cycle K.

2° Une transformation étant définie par l'axe de transformation Ω et par le module α, il y existe une infinité de cycles qui ont pour transformés des points; ils sont définis par la relation

$$\frac{R}{D} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

Leur propriété caractéristique est que *leur rayon varie proportionnellement à la distance de leur centre*

à l'axe; elle présente une grande importance dans l'application de la transformation par semi-droites réciproques à la théorie des anticaustiques par réfraction.

20. Théorème. — *La distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.*

Considérons, en effet, deux cycles; désignons respectivement par R et r leurs rayons, par D et d les distances de leur centre à l'axe de transformation, par p la projection sur cet axe de la droite qui joint leurs centres, et par T leur distance tangentielle; on aura évidemment

$$T^2 = p^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2.$$

Soient de même R' et r' les rayons des cycles transformés, D' et d' les distances de leurs centres à l'axe, et T' leur distance tangentielle. Si l'on remarque que deux cycles réciproques ont leurs centres sur une même perpendiculaire à l'axe, il est clair que l'on a

$$T'^2 = p^2 + (D' - d')^2 - (R' - r')^2.$$

Or les formules données plus haut donnent aisément

$$D' - d' = \frac{(D - d)(\alpha^2 + 1) - 2\alpha(R - r)}{1 - \alpha^2},$$

$$R' - r' = \frac{2\alpha(D - d) - (\alpha^2 + 1)(R - r)}{1 - \alpha^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il viendra, toutes réductions faites,

$$T'^2 = p^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2 = T^2;$$

ce qui démontre la proposition énoncée ([1]).

([1]) Relativement à la transformation par rayons vecteurs réci-

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE.

21. Soient trois cycles K, K′ et K″ ayant respectivement pour centre les points O, O′ et O″. Soient P″ le centre de similitude des cycles O et O′, P′ le centre de similitude des cycles O et O″. Supposons que la droite P′P″ ne coupe pas le centre O; en prenant cette droite pour axe de transformation, nous pourrons toujours, en choisissant convenablement le module de la transformation, transformer le cycle O en un point ω. Les deux tangentes P″A et P″B auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points P″ et ω; le cycle K′, étant tangent à P″A et P″B, aura pour transformé un cycle tangent à ces demi-droites opposées, et, par conséquent, un point ω′ qui sera l'intersection de P″ω avec la perpendiculaire abaissée de O′ sur l'axe P′P″.

Les deux tangentes P′C et P′D (*fig.* 7) auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par la droite P′ω, et il est clair que le cycle O″, qui touche P′C et P′D, aura pour transformé le point ω″, où P′ω rencontre la perpendiculaire abaissée de O″ sur l'axe P′P″. Si l'on considère maintenant les deux tangentes communes aux cycles K′, K″, elles auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points ω′ et ω″. D'où il résulte que ces tangentes se coupent au point P où la droite ω′ω″ rencontre P′P″, et de là une démonstration

---

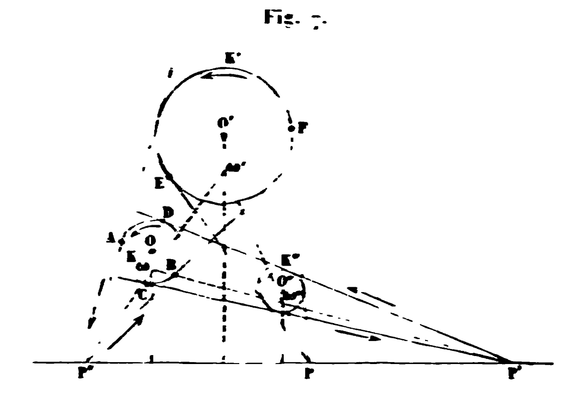
proques, le théorème analogue est le suivant : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles correspondants.*

Ce théorème s'étend à deux courbes quelconques, et de même dans la transformation par semi-droites réciproques :

Si une semi-droite Δ touche deux courbes aux deux points a et b, et si la semi-droite réciproque Δ′ touche les courbes transformées aux points a′ et b′, les deux longueurs ab et a′b′ sont égales.

nouvelle de cette proposition rappelée plus haut : *Les trois centres de similitude de trois cycles considérés deux à deux sont en ligne droite;* il suit de là égale-

Fig. 7.



ment que *si trois cycles sont tels que la droite qui contient leurs centres de similitude ne les rencontre pas, on peut, par une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points* (¹).

22. La transformation par semi-droites réciproques peut servir, comme la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit à simplifier la solution de certains problèmes, soit à généraliser diverses propriétés des figures.

23. Pour en donner un exemple simple, considérons le problème suivant : *Construire un cycle touchant trois cycles donnés.*

(¹) La propriété analogue dans la théorie de la transformation par rayons vecteurs réciproques est la suivante : *Lorsque deux cercles se coupent, on peut toujours les transformer en deux droites.*

Supposons que les cycles donnés K, K′ et K″ soient tels que la droite qui contient leurs centres de similitude ne les coupe pas; nous pouvons, d'après ce qui précède, en prenant cette droite pour axe de transformation, transformer les cycles donnés en trois points ω, ω' et ω''. Le cercle passant par ces points détermine deux cycles opposés H et H′ dont les réciproques seront les solutions du problème. Deux cycles opposés rencontrant l'axe de transformation aux mêmes points, il en est de même de leurs réciproques; d'où il suit que le problème proposé a deux solutions, et que l'axe radical des deux cycles qui satisfont à la question est l'axe de similitude des cycles donnés.

Le problème de *mener un cercle tangent à trois cercles donnés* se ramène immédiatement au précédent. On peut, en effet, donner à un des cercles un sens arbitraire, de façon à le transformer en un cycle; on transformera également les deux autres cercles en cycles en fixant leur direction, ce qui pourra se faire de quatre façons différentes. A chaque groupe de cycles correspondent deux solutions; le problème proposé aura donc en tout huit solutions.

24. Un point décrivant dans un sens déterminé une semi-droite ou un cycle, si l'on emploie la transformation par rayons vecteurs réciproques, on voit que le point transformé décrit une autre semi-droite ou un autre cycle (lequel peut se réduire à une semi-droite quand le pôle de transformation est sur le cycle considéré).

On peut souvent, avec avantage, employer simultanément la transformation par rayons vecteurs réciproques et la transformation par semi-droites réciproques. Ainsi, en général, *étant donnés cinq cycles, on peut, par deux transformations successives, les trans-*

former en deux semi-droites et en trois points. En effet, si deux des cycles se coupent, par une première transformation par rayons vecteurs réciproques, on pourra les transformer en deux semi-droites. Les trois autres cycles ayant pour transformées K, K′ et K″, si l'axe de similitude de ces cycles ne les rencontre pas, on pourra, par une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points, tandis que les semi-droites se transformeront en semi-droites.

III.

Sur les anticaustiques de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

25. J'appelle *bissectrice* de deux semi-droites données la droite parfaitement déterminée qui est le lieu des cycles tangents à ces demi-droites; la droite menée par leur point de rencontre et perpendiculairement à la bissectrice sera désignée sous le nom de *bissectrice impropre*.

Deux demi-droites sont symétriques par rapport à leur bissectrice impropre; je dirai qu'elles sont *anti-symétriques* par rapport à leur bissectrice.

Ces définitions étant posées, je m'appuierai sur les lemmes suivants :

Lemme I. — *Quatre semi-droites étant données, si l'on considère trois à trois ces semi-droites, on obtient quatre triangles; les centres des cycles inscrits dans ces triangles sont sur un même cercle.*

Considérons en effet (*fig.* 8) les quatre semi-droites

Fig. 8.

AB, BE, EA et CF. Les bissectrices des côtés du triangle

ABC le coupent au point δ, celles du triangle BCD au point α, celles du triangle EDF au point β et celles du triangle CFA au point γ. Pour établir que ces quatre points sont sur une même circonférence, il suffit d'établir que l'angle $\alpha\delta\beta$ est égal à l'angle $\alpha\gamma\beta$.

On a évidemment

$$\widehat{\alpha\delta\beta} = \widehat{BE\delta} + \widehat{EB\delta} = \tfrac{1}{2}\widehat{BEA} - \tfrac{1}{2}\widehat{EBA} - \tfrac{1}{2}\widehat{BAH};$$

d'autre part, on a

$$\widehat{\alpha\gamma\beta} = \widehat{FC\gamma} + \widehat{CF\gamma} = \tfrac{1}{2}\widehat{FCA} - \tfrac{1}{2}\widehat{CFA} = \tfrac{1}{2}\widehat{BAH}.$$

La proposition est donc démontrée.

26. Sur la circonférence $\alpha\gamma\beta\delta$, considérons le point M diamétralement opposé au point δ; on voit que les droites Mα, Mβ et Mγ sont respectivement perpendiculaires aux droites Bα, Eβ et Aγ. Or α est le centre du cycle qui touche les semi-droites AB, BE et CF, β le centre du cycle qui touche les semi-droites BE, AE et CF, et γ le centre du cycle qui touche les semi-droites AE, AB et CF. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lemme II. — *Étant données quatre semi-droites* D, D', D'' *et* Δ, *soient* α, α', α'' *les centres des cycles inscrits respectivement dans les triangles déterminés par les semi-droites* (D', D'', Δ), (D'', D, Δ) et (D, D', Δ); *désignons par* β *le point de rencontre de* D' *et* D'', *par* β' *le point de rencontre de* D'' *et de* D *et enfin par* β'' *le point de rencontre de* D *et* D'.

Cela posé, les droites menées par les points α, α', α'' *et perpendiculaires respectivement aux droites* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ $\alpha''\beta''$ *concourent en un même point.*

27. Considérons maintenant deux semi-droites fixes A et Δ et une semi-droite mobile B assujettie à la condition suivante, à savoir que p désignant le point de rencontre de A et de Δ, q le centre du cycle inscrit dans le triangle formé par les semi-droites A, B et Δ, la droite menée par q perpendiculairement à pq passe par un point fixe F.

La semi-droite B enveloppera dans son mouvement une courbe parfaitement déterminée; elle est de l'espèce de celles que j'ai appelées *hypercycles* et de la troisième classe; c'est donc un *hypercycle cubique*. Dans tout le cours de cette Note, quand il n'y aura aucune confusion à craindre, je la désignerai simplement sous le nom d'*hypercycle;* comme je le montrerai plus tard, le point fixe F est le foyer de cette courbe ([1]).

28. Un hypercycle étant ainsi défini par les deux semi-droites A et Δ, considérons une autre tangente quelconque à la courbe C; en désignant par r le point de rencontre de A et de C, par s le centre du cycle tangent aux semi-droites A, C et Δ, il suit de la définition de la courbe que la droite menée par s perpendiculairement à rs passe par le foyer de la courbe. Soient maintenant α le point de rencontre des tangentes C et B, β le centre du cycle tangent à B, C et Δ; il résulte du lemme II que la droite menée par β perpendiculairement à $\beta\alpha$ passe également par le foyer F.

Nous pouvons donc énoncer cette propriété fondamentale :

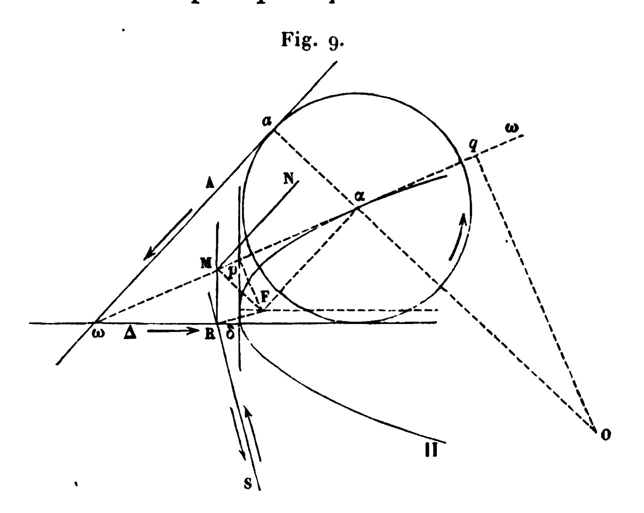
Théorème I. — *Étant données deux tangentes quel-*

([1]) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les hypercycles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séances des 20 mars, 3, 10 et 24 avril 1882).

conques de l'hypercycle, considérons le centre du cycle qui touche ces deux tangentes et la semi-droite Δ; *les droites qui joignent ce centre au foyer de la courbe et au point de rencontre des tangentes sont perpendiculaires entre elles.*

29. Considérons une tangente A (*fig.* 9) à un hypercycle H et *a* le point où elle touche la courbe; la tangente infiniment voisine A′ passe par le point A et la bissectrice de

Fig. 9.



deux semi-droites A et A′ est la normale menée au point *a*; soit α le point où cette normale rencontre la bissectrice des semi-droites A et Δ; d'après le théorème précédent, la droite Fα est perpendiculaire à la normale et, par suite, parallèle à A. D'où la proposition suivante:

Étant donnée une tangente A *à l'hypercycle* H, *que par le foyer* F *de la courbe on mène une parallèle à* A, *et que l'on prenne son point de rencontre* α *avec la bissectrice des semi-droites* A *et* Δ; *que du point* α *on abaisse ensuite une perpendiculaire de la tangente* A, *le pied* a

de cette perpendiculaire est le point de contact de A *avec la courbe.*

30. La semi-droite Δ est tangente à la courbe. Supposons en effet (*fig.* 2) l'hypercycle défini par la semi-droite Δ et une tangente quelconque A. Soit $\omega\omega'$ la bissectrice des demi-droites A et Δ; abaissons du point F une perpendiculaire Fp sur $\omega\omega'$, puis, du point p, une perpendiculaire $p\delta$ sur Δ. Si nous imaginons une semi-droite Δ' infiniment voisine de Δ et passant par le point d, la bissectrice de Δ et de A est la droite $\omega\omega'$, le centre du cycle tangent à A, Δ et Δ', est évidemment le point p et, comme pF est perpendiculaire à $p\omega$, il résulte du théorème I que Δ' (et par suite Δ) est tangente à l'hypercycle; son point de contact est le point A.

Je dirai que Δ est la tangente principale de la courbe.

Dans la démonstration précédente, A est une tangente quelconque de l'hypercycle; lorsque cette tangente varie, on voit que la bissectrice $\omega\omega'$ enveloppe une parabole Π ayant F pour foyer, et $p\delta$ pour tangente au sommet: cela résulte immédiatement de ce que l'angle F$p\omega$ est un angle droit.

Il est aisé de voir que la droite $\omega\omega'$ touche la parabole Π au point α; de ce point, comme centre, décrivons un cycle touchant à la fois Δ et A; son enveloppe, lorsque A se déplace tangentiellement à l'hypercycle et que le point α décrit la parabole Π, se compose de la semi-droite Δ et de l'hypercycle H : on peut donc dire que *le lieu des centres des cycles qui touchent l'hypercycle et la tangente fondamentale* Δ *est la parabole* Π.

En d'autres termes :

L'hypercycle H *est une anticaustique* (1) *par réflexion*

(1) Dans la suite de cette Note, chaque fois que je parlerai d'une

de la parabole Π, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe de cette parabole.*

Remarque. — On voit que la parabole Π est le lieu des points α; il en résulte que *la parabole* Π *est le lieu des projections du foyer* F *sur les normales à l'hypercycle.*

31. *Tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point situé sur une tangente donnée.*

Soient un hypercycle H défini par son foyer F, sa tangente principale Δ et une tangente quelconque A; soit, de plus, ωω′ la bissectrice des semi-droites A et Δ. Étant pris sur A un point quelconque M, si nous imaginons une tangente quelconque menée de ce point à la courbe, il suit du théorème I que, du centre du cycle inscrit dans cette tangente, A et Δ, on doit voir sous un angle droit le segment MF. Soit MF comme diamètre décrivant un cercle, et soient α, β les points où ce cercle coupe la bissectrice ωω′; il est clair, d'après ce qui précède, que les tangentes que, du point M, on peut mener à la courbe (et qui sont distinctes de A), sont les *antisymétriques* de A relativement aux droites Mα et Mβ.

Remarque I. — Il résulte de la construction précédente que par chaque point du plan passent trois tangentes à la courbe : l'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe.

Remarque II. — Par le foyer F, menons une droite qui soit parallèle à la bissectrice ωω′ et qui rencontre A au point p; soit q le point symétrique p relativement

anticaustique, sans rien mentionner de plus, je supposerai expressément que les rayons incidents sont parallèles.

au point ω, intersection de A et de Δ. Si, sur qF comme diamètre, nous décrivons un cercle rencontrant la bissectrice $\omega\omega'$ aux points α et β, le centre de ce cercle est évidemment sur cette bissectrice; l'angle $\alpha q \beta$ est par conséquent droit, et les deux tangentes, que du point q on peut mener à l'hypercycle (indépendamment de la tangente A), sont des semi-droites opposées : cela résulte immédiatement de la construction donnée ci-dessus.

Ces deux tangentes sont distinctes, ainsi que leurs points de contact; la droite qui correspond à ces deux semi-droites opposées est donc une *tangente double* de la courbe; mais elle doit être considérée comme une *tangente double apparente* ([1]).

L'hypercycle, étant de la troisième classe et ayant une tangente double, est du quatrième degré.

Remarque III. — Supposons que le cercle décrit sur MF comme diamètre soit tangent à la bissectrice $\omega\omega'$; les points α et β étant confondus, il en est de même des droites Mα et Mβ; par suite, les tangentes menées du point M à la courbe (et distinctes de A) sont confondues. Le point M est donc situé sur la courbe; d'où la conclusion suivante :

Soit P *le pied de la perpendiculaire abaissée du*

([1]) Au point de vue où nous sommes placé ici, une semi-droite est tangente double d'une courbe si, en deux de ses points, elle a même direction que cette courbe; c'est alors une *tangente double effective*. Mais, si une droite est telle, qu'en la prenant d'abord dans un sens déterminé elle touche la courbe et qu'elle la touche encore en la prenant dans le sens inverse, on a une *tangente double apparente*.

Lorsqu'on effectue une transformation par directions réciproques, une tangente double effective a pour transformée une tangente double effective, tandis qu'une tangente double apparente (qui résulte de la superposition de deux tangentes opposées) a pour transformées deux tangentes ordinaires distinctes.

foyer F *sur la tangente* A; *par les deux points* F *et* P *on peut mener deux cercles tangents à la bissectrice de* A *et de la tangente fondamentale, les points où ces cercles coupent* A *sont les deux points (distincts du point de contact) où cette tangente coupe l'hypercycle.*

32. *Tangente parallèle à une semi-droite donnée.* — L'hypercycle étant défini comme précédemment par son foyer F, la tangente fondamentale Δ et une tangente quelconque A, proposons-nous de mener à cette courbe une tangente parallèle à une semi-droite donnée D.

Construisons à cet effet la bissectrice (D, A) ([1]) et menons par le foyer F une perpendiculaire à (P, A); par le point β, où cette perpendiculaire coupe la bissectrice (A, Δ), menons une parallèle à (D, A) rencontrant au point α la tangente A. Il résulte du théorème I que l'antisymétrique de A relativement à la droite αβ est une tangente à la courbe qui est évidemment parallèle à la semi-droite donnée D.

On peut donc mener une tangente, et une seule, qui soit parallèle à une semi-droite donnée; comme on peut mener également une tangente parallèle à la semi-droite opposée, il en résulte que, par un point situé à l'infini, on peut généralement mener deux tangentes à la courbe. La courbe étant de troisième classe, on voit qu'elle est nécessairement tangente à la droite de l'infini.

Deux cas particuliers sont à remarquer : si la droite donnée est antiparallèle à Δ, les bissectrices (D, A) sont (Δ, A) perpendiculaires, et le point β est répété à l'in-

---

([1]) Ici et comme dans tout ce qui suit, je désigne, pour abréger, par la notation (P, Q) la bissectrice de deux semi-droites données P et Q.

fini. La tangente antiparallèle à Δ étant rejetée à l'infini, on voit que le point de contact de l'hypercycle avec la droite de l'infini est sur Δ; en d'autres termes :

La tangente principale est la tangente que l'on peut mener à la courbe par le point où elle touche la droite de l'infini.

Considérons, en second lieu, le cas où D est une direction isotrope; je ferai remarquer à ce sujet qu'*une semi-droite isotrope doit être considérée comme se confondant avec son opposée* (1).

Si donc on considère un des ombilics du plan (c'est-à-dire des deux points imaginaires communs à tous les cercles du plan), on voit que par ce plan on ne peut mener à la courbe qu'une tangente distincte de la droite de l'infini : d'où il résulte que ce point est situé sur la courbe.

L'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe et du quatrième degré, tangente à la droite de l'infini et passant par les ombilics. Elle a un seul foyer, qui est un foyer singulier; la construction donnée ci-dessus montre aisément que ce foyer est le point F (2).

Réciproquement, toute courbe de la troisième classe et du quatrième degré qui touche la droite de l'infini et passe par les ombilics du plan est un hypercycle.

33. Voici encore une conséquence de la construction donnée ci-dessus. Une tangente A étant donnée, cherchons à déterminer la tangente A' parallèle à la direc-

---

(1) On voit qu'il n'y a pas besoin de distinguer le sens dans lequel est décrite une droite isotrope ; ainsi *droite isotrope* et *semi-droite isotrope* ont exactement la même signification.

(2) Il suffit de remarquer que la bissectrice d'une semi-droite donnée et d'une droite isotrope est cette droite isotrope elle-même.

tion opposée. La bissectrice (A, A′) est une droite parallèle à A, et la perpendiculaire abaissée du foyer F sur cette droite rencontre la bissectrice $\omega\omega'$ au point M (*fig.* 2) : d'où il résulte que A′ est l'antisymétrique A par rapport à la droite MN menée par le point M parallèlement à A.

Or l'enveloppe de cette droite est aisée à trouver ; l'angle MFα étant droit, le point M décrit la directrice de la parabole Π, et, l'angle NMF étant également droit, MN enveloppe une parabole Π′, qui a pour foyer F et pour tangente au sommet la directrice MR de la parabole Π.

Je ferai remarquer que la droite RS, menée par le point R perpendiculairement à RF, est la tangente double de la courbe.

34. L'hypercycle étant défini comme enveloppe d'une semi-droite mobile est, comme le cycle, une *courbe de direction*; je veux dire par là qu'en chacun de ses points la tangente est déterminée de position et de direction.

Considérons un cycle C et le cercle K déterminé par ce cycle; le cercle K étant de seconde classe et l'hypercycle de la troisième, ces deux courbes ont en commun six tangentes dont la direction est déterminée, puisqu'elles touchent l'hypercycle. De ces six semi-droites, trois seulement sont tangentes à C, les autres étant tangentes au cycle opposé.

Ainsi, *un cycle et un hypercycle ont trois tangentes communes.*

35. *Détermination des tangentes communes à un cycle qui touche une tangente à l'hypercycle.*— Considérons un cycle C qui touche une tangente A à l'hypercycle; il a en commun avec cette courbe deux autres tangentes que l'on peut déterminer par la règle et le compas.

A cet effet, Δ désignant la tangente principale de la courbe, F son foyer et $\omega\omega'$ la bissectrice (A, D), appelons O le centre du cycle donné, et qui est ainsi bien défini; sur OF comme diamètre, décrivons un cercle K qui coupe $\omega\omega'$ aux points γ et δ; joignons Oα et Oβ, et soient γ' et δ' les points où ces droites rencontrent la tangente A.

Cela posé, on vérifiera facilement que les tangentes menées des points α' et β' au cycle C sont les tangentes cherchées.

36. *Construction du cycle osculateur en un point donné.* — Soit (*fig.* 9) à construire le cycle osculateur au point *a* où la tangente A touche la courbe. Si le cycle C est osculateur, les points γ' et δ' doivent se confondre avec le point *a*, et par conséquent les points γ et δ avec le point α. Le cercle K touche donc la bissectrice $\omega\omega'$ au point α, et son centre est déterminé, puisqu'il est, en outre, sur la droite élevée par le milieu du segment Fα perpendiculaire à ce segment.

De là la construction simple suivante :

F*p étant la perpendiculaire abaissée du foyer* F *sur la bissectrice* $\omega\omega'$, *déterminons le point q symétrique de p par rapport à* α *et, au point q, menons une droite perpendiculaire à* $\omega\omega'$: *le point* O *où cette droite rencontre la normale est le centre du cycle osculateur de la courbe au point a.*

37. *Lieu des centres des cycles qui touchent l'hypercycle et une tangente donnée de cette courbe.* — En conservant les mêmes notations que ci-dessus, supposons que le cycle qui a pour centre le point O soit tangent à l'hypercycle; les deux points γ' et δ' seront alors confondus, ainsi que les points γ, δ. Le cercle décrit

sur OF comme diamètre touche donc $\omega\omega'$: son centre O', étant également distant du point F et de $\omega\omega'$, décrit une parabole ayant F pour foyer et $\omega\omega'$ comme directrice, et, par suite, le centre O décrit une parabole P ayant F pour foyer et $\omega\omega'$ pour tangente au sommet.

La même proposition peut s'énoncer de la façon suivante :

L'hypercycle est une anticaustique de la parabole P, *les rayons incidents étant perpendiculaires à la tangente* A.

Un hypercycle peut être ainsi considéré d'une infinité de façons comme une anticaustique de parabole ; toutes les paraboles qui correspondent à ce mode de génération sont homofocales, et leurs tangentes au sommet enveloppent la parabole Π.

38. Il résulte également de là le théorème suivant, qui exprime une propriété de six semi-droites quelconques tangentes à un même hypercycle :

Théorème II. — *Si six semi-droites* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *et* A_6 *sont tangentes à un même hypercycle, les cinq bissectrices* (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, A_5) et (A_1, A_6) *sont tangentes à une même parabole.*

Le foyer de cette parabole est le foyer de l'hypercycle.

39. Comme je l'ai dit plus haut, l'hypercycle est une courbe de direction ; en d'autres termes, en chaque point de cette courbe, la tangente est déterminée non seulement en position, mais encore en direction. Il en est de même du cycle ; mais une courbe algébrique, prise au hasard, n'est pas une courbe de direction.

Étant donnée une courbe algébrique K de classe n, si, en la supposant décrite dans un certain sens, on peut

la transformer en une courbe de direction K_0, il faut que, étant donné un cycle quelconque C, des $2n$ tangentes communes à K et à C, n soient seulement des tangentes effectives à K_0, les n autres étant des tangentes apparentes.

De là résulte que l'équation qui détermine les tangentes communes à K et à C doit, par l'extraction d'une simple racine carrée, se ramener à la résolution des deux équations du degré n; et, comme (en coordonnées rectangulaires) l'équation tangentielle d'un cercle quelconque est

$$u^2 + v^2 = (\alpha u + \beta v + \gamma)^2,$$

il en résulte que l'équation tangentielle la plus générale d'une courbe de direction est de la forme

$$F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v),$$

F et Φ désignant deux fonctions rationnelles de u et de v.

40. Lorsque l'équation d'une courbe algébrique K du degré n n'est pas de la forme que je viens d'indiquer (telle est, par exemple, une conique quelconque différente du cercle), pour la transformer en une courbe de direction, il faut la considérer comme double, et comme le résultat de la superposition de deux courbes opposées qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit dont le centre décrit la courbe K.

Une telle courbe doit être considérée comme double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées, et, au point de vue où nous sommes placés, elle est de la classe $2n$.

41. Étant données une courbe algébrique quelconque K et une semi-droite Δ, considérons les cycles qui, ayant leur centre sur K, sont tangents à Δ; ils enveloppent évidemment une courbe de direction G, qui est

une anticaustique de K, les rayons incidents étant perpendiculaires à Δ.

Ainsi toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction; réciproquement, étant donnée une courbe de direction quelconque G, elle est une anticaustique d'une infinité de courbes algébriques que l'on déterminera de la façon suivante.

Étant prises arbitrairement une semi-droite Δ et une tangente quelconque T à la courbe G, que l'on construise la bissectrice (T, Δ); lorsque T se déplace tangentiellement à G, la droite (T, Δ) enveloppe une courbe algébrique K, qui est le lieu des centres des cycles qui touchent à la fois Δ et la courbe G.

Si la courbe G est une courbe double, en chaque point M de cette courbe, on peut mener deux tangentes opposées, et si N désigne le point où elles rencontrent Δ, par N passent deux bissectrices rectangulaires entre elles, dont l'enveloppe est la courbe K.

Dans ce cas, l'enveloppe des cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K est la *courbe double* G, chaque point M de G étant le point de contact de deux cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K; ou, si l'on veut encore, chaque point de G étant situé sur deux rayons réfléchis sur K.

42. On peut encore énoncer les résultats qui précèdent sous la forme suivante : G désignant une courbe algébrique, traçons dans le plan une droite arbitraire D, menons une tangente T à G et construisons les deux bissectrices rectangulaires des droites T et D; cela posé, lorque T se déplace tangentiellement à la courbe, ces bissectrices enveloppent une autre courbe. Si cette dernière courbe se décompose en deux autres, on peut transformer la courbe G en une courbe de direction

en donnant en chacun de ses points une direction à la tangente. On retrouverait ainsi la condition analytique que j'ai donnée plus haut, à savoir que l'équation en coordonnées tangentielles d'une courbe de direction est de la forme $F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\Phi^2(u, v)$.

Les courbes parallèles à une courbe de direction et l'enveloppe de ses normales sont également des courbes de direction; il en est de même des caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons incidents étant parallèles.

43. Considérons une courbe de direction G qui est l'enveloppe des cycles dont les centres décrivent la courbe K, tandis qu'ils demeurent tangents à une semi-droite Δ.

Effectuons une transformation par semi-droites réciproques; soient G_0 la transformée de G, et Δ_0 la semi-droite transformée de Δ. G_0 peut être considéré comme l'enveloppe de cycles tangents à Δ_0, et dont les centres parcourent une courbe K_0.

Il est aisé d'établir que K_0 est une transformée homographique de K, la transformation étant de telle nature que la droite de l'infini se correspond à elle-même.

Prenons en effet pour axe des x l'axe de la transformation, et pour axe des y une droite perpendiculaire. Soient x, y les coordonnées du centre d'un cycle tangent à Δ et à G, et r son rayon; soient X, Y les coordonnées du cercle transformé et R son rayon. On aura les formules suivantes ([1]):

$$X = x, \quad Y - y = \alpha(R - r), \quad Y + y = \frac{1}{\alpha}(R + r);$$

en éliminant R entre les deux dernières relations, il

([1]) Voir p. 15.

vient

$$Y = \frac{(\alpha^2 - 1)y - 2\alpha r}{\alpha^2 + 1}.$$

Si maintenant on remarque que le cercle de rayon r demeure tangent à une semi-droite fixe du plan, on voit que, *en grandeur et en signe*, r est exprimé par une fonction linéaire de x et de y.

On a donc une relation de la forme

$$Y = Ax + By + C,$$

où A, B, C désignent des constantes, et cette formule, jointe à la formule $X = x$, démontre la proposition énoncée.

Une transformation homographique, qui conserve la droite de l'infini, transformant une conique en conique et une parabole en parabole, il en résulte qu'une anticaustique de conique se transforme, par une transformation par directions réciproques, en une anticaustique de conique, et qu'un hypercycle (qui est une anticaustique de parabole) a pour transformée un autre hypercycle (1).

44. *Un hypercycle est déterminé quand on se donne cinq de ses tangentes.* — Cinq tangentes A, B, C, D, E étant en effet données, que l'on construise, par exemple, les quatre bissectrices (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), et la parabole P tangente à ces quatre droites; il est clair, d'après ce qui précède, que l'hypercycle est l'en-

---

(1) Sur ce point et sur d'autres propriétés de l'hypercycle, voir ma Note *Sur les hypercycles,* insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séances des 20 et 27 mars, 3, 10 et 24 avril 1882.

veloppe des cycles qui touchent A, et dont le centre décrit P; son foyer est du reste le foyer de P.

La proposition précédente signifie qu'il y existe un seul hypercycle touchant *cinq semi-droites données*, mais il y existe seize hypercycles touchant *cinq droites données*. Ayant en effet attribué un sens arbitraire à l'une des droites pour la transformée en semi-droites, on peut attribuer à chacune des quatre autres un sens arbitraire, ce qui donne lieu à seize combinaisons différentes.

45. *Indépendamment de la droite de l'infini, deux hypercycles quelconques* H *et* H′ *ont quatre tangentes communes.*— Soient, en effet, H_0 la courbe H′ considérée indépendamment de son sens; H_0 et H, étant toutes les deux de troisième classe, ont neuf tangentes communes. Abstraction faite de la droite de l'infini, il en reste huit autres qui sont tangentes soit à H, soit à la courbe H_1 opposee à H. Deux hypercycles ne peuvent d'ailleurs, d'après le théorème précédent, avoir plus de quatre tangentes communes; des huit tangentes considérées, quatre sont donc tangentes à H et quatre tangentes à H_1, ce qui démontre la proposition énoncée.

46. *Faisceaux d'hypercycles.* — Je dirai que l'ensemble des hypercycles qui touchent quatre semi-droites données constitue un faisceau.

Il est clair, d'après ce qui précède, que, parmi les hypercycles d'un faisceau, il n'y en a qu'un qui touche une semi-droite donnée; on prouvera facilement qu'il y en a quatre qui passent par un point donné.

Le lieu des foyers des hypercycles du faisceau déterminé par quatre semi-droites données A, B, C, D est le cercle qui contient (lemme I) les centres des cycles in-

scrits dans les triangles que l'on détermine en considérant trois à trois les semi-droites données.

Considérons en effet les bissectrices (A, B), (A, C) et (A, D); on voit que les foyers des hypercycles du faisceau sont les foyers des paraboles tangentes à ces trois droites; or, d'après un théorème connu, le lieu de ces foyers est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites, d'où la proposition énoncée.

47. *Hypercycles exceptionnels.* — Un point d à l'infini étant défini par un système (D) de semi-droites parallèles entre elles, on peut considérer l'ensemble du point d et d'un cycle quelconque C comme constituant un hypercycle. Les tangentes que l'on peut, d'un point quelconque M du plan, mener à cet hypercycle exceptionnel se composent des tangentes menées du point M au cycle et de la semi-droite menée par M parallèlement au système (D).

Étant donné un tel hypercycle exceptionnel (d, C), si l'on mène à C une tangente antiparallèle au système (D) [1], cette tangente est la tangente principale du cycle exceptionnel, et la droite correspondante en est la tangente double.

C'est ce que l'on verra facilement sur la *fig.* 2, en supposant que le foyer F se rapproche indéfiniment de la bissectrice $\omega\omega'$ et vient se placer sur cette droite, auquel cas l'hypercycle se réduit à un cycle et à un point à l'infini.

48. Un faisceau déterminé par quatre semi-droites A, B, C, D renferme quatre cycles exceptionnels, à savoir :

---

[1] Je rappellerai que deux semi-droites sont dites *antiparallèles* lorsque, les droites qu'elles déterminent étant parallèles, elles sont dirigées en sens inverse.

Celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans A, B, C et le point à l'infini sur D, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans B, C, D et le point situé à l'infini sur A, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans C, D, A et le point situé à l'infini sur B, et enfin celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans D, A, B et le point à l'infini sur C.

La considération de ces cycles exceptionnels est d'une grande importance dans la théorie des faisceaux d'hypercycles, théorie sur laquelle j'aurai occasion de revenir.

IV.

Sur quelques propriétés des cycles.

---

49. Étant donnés deux cycles A et B, menons-leur une tangente commune; la distance comprise entre les points de contact de cette semi-droite est la distance tangentielle des deux cycles. Elle n'est évidemment déterminée qu'en valeur absolue; dans tout ce qui suit, je la désignerai simplement sous le nom de *distance des deux cycles*.

On sait que, si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, la distance de deux cycles est égale à la distance des deux cycles correspondants.

50. Étant donnés trois cycles A, B et C, on peut chercher de quelle façon sont distribués dans le plan les cycles équidistants de ces trois cycles. Si nous effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que, les cycles α, β et γ correspondant aux cycles donnés, α et β soient opposés, il suffira évidemment de résoudre le problème proposé relativement à la nouvelle figure.

Il est aisé de voir que les cycles équidistants de deux cycles opposés α et β se réduisent aux points du plan. Désignant, en effet, par R et — R les rayons des cycles opposés, par ρ le rayon d'un cycle équidistant de α et de β, par d la distance de son centre au centre commun de α et de β, on a

$$d^2 - (\mathrm{R} - \rho)^2 = d^2 - (\mathrm{R} + \rho)^2,$$

d'où

$$\mathrm{R}\rho = 0;$$

et, comme R est supposé différent de zéro, il suit

nécessairement

$$\rho = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Les cycles équidistants de α, β et γ devant se réduire à des points, on les obtiendra tous en considérant les divers points de l'axe radical D des cycles α et γ; et de là, si l'on revient à la première figure, on voit que les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B, C sont tangents à deux semi-droites fixes Δ et Δ' qui sont les transformées des deux semi-droites opposées définies par la droite D. Ces deux semi-droites passent d'ailleurs par les points p et q, intersections des cycles α et γ, lesquels points peuvent être considérés comme les cycles tangents à α, β et γ.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B *et* C *touchent deux semi-droites fixes* Δ *et* Δ', *qui sont les tangentes communes aux deux cycles qui sont tangents à* A, B *et* C.

J'appellerai ces semi-droites les *semi-droites radicales* des cycles A, B et C; leur point de rencontre est évidemment le centre radical des trois cycles.

51. Proposons-nous de trouver les cycles équidistants de quatre cycles donnés A, B, C et D. Dans ce but effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que, α, β, γ et δ correspondant respectivement à A, B, C et D, α et β soient des cycles opposés.

Les cycles équidistants de α et de β se réduisant aux points du plan, il est clair qu'il n'y a qu'un seul cycle qui soit équidistant des cycles α, β, γ et δ : c'est le centre radical des cycles α, γ et δ; et de là, en revenant à la figure primitive, on peut conclure que :

Il n'y a dans le plan qu'un seul cycle équidistant de quatre cycles donnés A, B, C *et* D.

Je le désignerai sous le nom de *cycle radical* des cycles A, B, C et D.

52. Le cycle radical de A, B, C et D étant équidistant de A, B et C touche les semi-droites radicales de ces trois cycles; d'où la proposition suivante :

Étant donnés quatre cycles, les semi-droites radicales de trois quelconques de ces cycles touchent leur cycle radical; en groupant de toutes les façons possibles trois à trois les quatre cycles donnés, on a donc quatre systèmes de deux semi-droites qui touchent le cycle radical.

Un cas particulièrement remarquable est le suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre semi-droites données; A_i désignant l'une quelconque d'entre elles, appelons K_i le cycle qui touche les trois autres. Nous déterminerons ainsi quatre cycles K_1, K_2, K_3 et K_4; soit K leur cycle radical.

Il résulte de ce qui précède que K est tangent aux trois semi-droites radicales de K_1, K_2 et K_3; or ces cycles touchent tous les trois la semi-droite A_4 et il est aisé de voir que, quand trois cycles sont tangents à une même semi-droite Δ, leurs deux semi-droites radicales se confondent entre elles ou, pour parler plus exactement, se composent de deux semi-droites se coupant en leur centre radical et différant infiniment peu de la semi-droite menée en ce point parallèlement à la semi-droite Δ.

On conclut de là que le cycle K passe par le centre radical de K_1, K_2 et K_3 et est tangent à la semi-droite menée par ce point parallèlement à A_4.

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère de toutes les façons possibles trois quelconques des cycles K_1, K_2, K_3 *et* K_4 *et leur centre radical, on obtient quatre points qui sont sur un même cycle* K *et les tangentes menées à ce cycle en ces points sont respectivement parallèles aux semi-droites* A_1, A_2, A_3 *et* A_4.

Ce cycle K *est le cycle radical de* K_1, K_2, K_3 *et* K_4.

53. Les quatre cycles K_i qui sont ainsi déterminés par les semi-droites A_1, A_2, A_3 et A_4 jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables. J'énoncerai ici la suivante :

Si, parallèlement à une semi-droite donnée Δ, *on mène des tangentes à* K_1, K_2, K_3 *et* K_4, *le rapport anharmonique de ces quatre semi-droites est constant quelle que soit la direction de* Δ.

Pour démontrer cette proposition, j'énoncerai d'abord le lemme suivant dont l'application est fréquente :

Lemme. — *Si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, à quatre semi-droites parallèles entre elles correspondent également quatre semi-droites parallèles.*

Le rapport anharmonique de celles-ci est égal au rapport anharmonique des quatre premières.

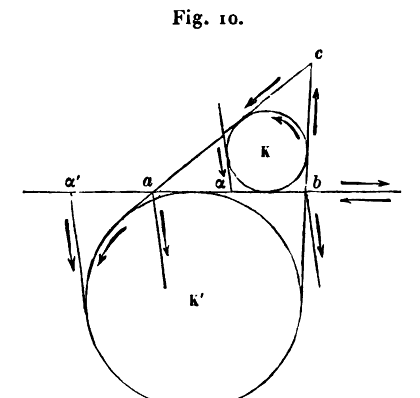
La démonstration de ce lemme résulte immédiatement de ce que deux semi-droites correspondantes se coupent au même point de l'axe de transformation.

Cela posé, je remarque que l'on peut toujours effectuer une transformation par semi-droites réciproques, de telle façon que deux semi-droites données aient pour transfor-

mées deux semi-droites opposées; le théorème que nous voulons démontrer étant projectif, il suffira donc de le démontrer dans ce cas.

Soient donc (*fig.* 10) *ca*, *bc*, *ab* et *ba* quatre semi-droites données ([1]), K le cycle tangent à *bc*, *ca* et *ab*, K′

Fig. 10.



le cycle tangent *ba*, *ca* et *bc*. Il est clair que le cycle tangent à *ca*, *ab* et *ba* se réduit au point *a* et que le cycle tangent à *bc*, *ab* et *ba* se réduit au point *b*.

Cela posé, menons aux deux cycles K et K′ des tangentes parallèles à une semi-droite prise arbitrairement et soient respectivement α et α' les points où ces tangentes coupent la droite *ab*. Les points α et α' se correspondent de façon qu'à un point α correspond un seul point α' et réciproquement à un point α' correspond un seul point α. En effet, si l'on se donne par exemple le point α, on ne

---

([1]) Lorsque je désigne une semi-droite par deux lettres, l'ordre dans lequel sont placées ces lettres indique le sens de la semi-droite; ainsi PQ désigne une semi-droite décrite par un point mobile allant du point P au point Q. Il en résulte que PQ et QP sont deux semi-droites opposées.

peut par ce point mener au cycle K qu'une seule tangente distincte de *ab*; d'autre part, on ne peut mener au cycle K′ qu'une seule tangente qui soit parallèle à celle-ci; le point α' où elle coupe *ab* est donc déterminé.

Il résulte de là que les points α et α' déterminent sur la droite *ab* deux divisions homographiques dont les points doubles sont évidemment les points *a* et *b*, et, par suite, en vertu d'une propriété bien connue, le rapport anharmonique des quatre points α, α', *a* et *b* est constant. Il en est évidemment de même du rapport anharmonique des tangentes passant par les points α et α' et des parallèles à ces tangentes menées par les points *a* et *b*. En d'autres termes, le rapport anharmonique des semi-droites, menées parallèlement à la semi-droite prise arbitrairement et tangentiellement aux cycles K, K′, *a* et *b*, est constant; ce qui démontre la proposition énoncée.

54. Étant données deux semi-droites quelconques Δ et Δ', circonscrivons à K_1 un angle dont les côtés soient parallèles à Δ et Δ', et soit P_1 le sommet de cet angle.

Soient de même P_2, P_3 et P_4 les sommets des angles analogues circonscrits aux cycles K_2, K_3 et K_4. Le rapport anharmonique de quatre côtés de ces angles étant égal au rapport anharmonique des quatre autres, il suit de la proposition fondamentale de la théorie des coniques que *les quatre points P_i sont sur une conique ayant ses asymptotes parallèles à Δ et à Δ'.*

En particulier, supposons que Δ et Δ' soient deux droites isotropes de système différent; les points P_i sont les centres des cycles K_i. On peut donc énoncer la proposition suivante, que j'ai déjà démontrée directement plus haut (1) :

(1) *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole* (p. 22).

Les centres des cycles K_i *sont situés sur un même cercle.*

55. J'énoncerai encore la proposition suivante :

Étant donnés deux cycles K *et* K′, *si l'on considère quatre cycles quelconques* H_1, H_2, H_3 *et* H_4 *doublement tangents à* K *et à* K′, *et si, à ces quatre cycles, on circonscrit des angles ayant leurs côtés parallèles aux deux tangentes communes à* K *et à* K′, *les quatre sommets de ces angles sont sur une conique ayant leurs asymptotes parallèles à ces tangentes communes.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que le rapport anharmonique des semi-droites, menées tangentiellement aux cycles K_i parallèlement à l'une des tangentes, est égal au rapport anharmonique des semi-droites menées à ces cycles parallèlement à l'autre tangente; et, comme cette propriété est projective, il suffit de la démontrer dans un cas particulier. Or on peut toujours effectuer une transformation par directions réciproques, de telle sorte que les cycles K et K′ soient opposés entre eux; les cycles H_i se réduisent alors à quatre points du cercle K_0 déterminé par K et K′; les deux tangentes communes à K et à K′ sont des droites isotropes et l'on sait, par la propriété fondamentale du cercle, que les droites isotropes d'un système qui passent par ces quatre points ont leur rapport anharmonique égal au rapport anharmonique des droites isotropes de l'autre système qui passent par les mêmes points.

La proposition est donc entièrement démontrée.

Une conique dont la direction des asymptotes est donnée étant déterminée par trois de ses points, la proposition précédente peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Si l'on considère tous les cycles H *qui touchent deux*

cycles donnés K *et* K′ *et si, à chacun des cycles* H, *on circonscrit un angle dont les côtés soient parallèles aux tangentes communes à* K *et à* K′, *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à ces deux tangentes.*

Il est facile de voir que cette conique a effectivement ces deux tangentes pour asymptotes et qu'elle passe par les points d'intersection des cycles K et K′; d'où encore la proposition suivante :

Étant donnée une conique quelconque, attribuons un sens quelconque aux asymptotes de cette conique de façon à les transformer en deux semi-droites Δ *et* Δ′. *Cela posé, considérons deux points quelconques* M *et* N *de la conique; par le point* M, *on peut mener deux cycles tangents à* Δ *et à* Δ′; *par* N *on peut mener deux parallèles à* Δ *et* Δ′ : *ces deux cycles et ces deux parallèles sont tangents à un même cycle* P.

J'ajouterai que la corde qui joint les points de contact de P avec Δ et Δ′ est l'axe radical des cycles qui, passant par M, touchent ces deux semi-droites.

56. Il est aisé de voir que le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi qu'il suit :

Par deux points donnés γ *et* δ, *on peut mener deux cercles* K *et* K′ *qui touchent un cercle donné* C; *par les points où la droite* $\gamma\delta$ *rencontre* C, *menons des tangentes à ce cercle, soit* ε *leur point de rencontre. Par les points* γ, δ *et* ε, *faisons passer une conique ayant ses asymptotes parallèles aux tangentes dont je viens de parler; les asymptotes de cette conique sont deux tangentes communes à* K *et à* K′.

On peut généraliser ce théorème en faisant une transformation homographique de telle sorte que les ombilics

du plan deviennent deux points quelconques α et β; on obtient alors la proposition suivante :

Étant donnés deux points quelconques α *et* β *sur une conique* C, *par deux points* γ *et* δ *du plan et les points* α *et* β *on peut mener deux coniques* K *et* K′ *qui touchent* C; *par les points où la droite* $\gamma\delta$ *coupe* C, *menons des tangentes à cette conique et soit* ε *leur point de rencontre; soient de plus* λ *et* μ *les points où la corde* $\alpha\beta$ *rencontre ces tangentes. Cela posé, si l'on construit la conique déterminée par les cinq points* λ, μ, γ, δ *et* ε, *les tangentes menées à cette conique aux points* λ *et* μ *sont deux tangentes communes à* K *et à* K′ ([1]).

9. En particulier, supposons que les points γ et δ soient les ombilics du plan; la proposition précédente pourra s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés sur une conique C *deux points* α *et* β, *on peut par ces points mener deux cercles qui touchent* C; *ces deux cercles ont pour tangentes communes les droites passant par les points où la droite* $\alpha\beta$ *coupe les asymptotes, tangentiellement au cercle déterminé par ces points et le centre de la courbe.*

Il est d'ailleurs évident que ces tangentes communes aux deux cercles se coupent en un de leurs centres de similitude.

10. Proposons-nous maintenant le problème suivant

([1]) La détermination des deux autres tangentes communes à K et à K′ donnerait lieu à des recherches intéressantes.

Un théorème analogue au précédent a lieu à l'égard des coniques qui touchent une conique donnée, deux tangentes à cette conique et deux droites données.

Je reviendrai du reste sur ce sujet.

(proposé cette année comme sujet de la composition d'admission à l'École Polytechnique) :

Étant donnés deux cercles K *et* K′ *se coupant aux points* α *et* β, *construire les diverses coniques qui, passant par* α *et* β, *touchent ces cercles.*

Construisons deux tangentes communes à K et à K′ passant par un de leurs centres de similitude, puis le cercle H qui touche ces tangentes en leurs points de rencontre avec la droite $\alpha\beta$. En désignant par λ et μ ces deux points, il est clair, d'après la proposition précédente, que si l'on prend un point O quelconque sur le cercle H et si l'on joint $O\lambda$ et $O\mu$, la conique qui, passant par les points α et β, a pour asymptotes $O\lambda$ et $O\mu$, touche les deux cercles K et K′.

Le lieu des centres des coniques cherchées est donc le cercle H, et l'on voit que l'angle formé par les asymptotes de toutes ces coniques est constant.

En considérant les deux tangentes communes qui passent par le second centre de similitude, on obtiendrait un autre système de solutions, le lieu des centres de ces coniques étant un second cercle ayant, comme il est facile de le voir, même centre que le premier.

V.

Sur les courbes de direction de la troisième classe:

I.

1. Étant donnée une semi-droite quelconque Δ, si l'on considère l'ensemble des semi-droites qui lui sont parallèles, on peut les regarder comme concourant en un même point situé à l'infini et que je désignerai par Δ_∞. Les semi-droites parallèles à la semi-droite opposée $-\Delta$ [1] peuvent être regardées comme concourant en un même point $-\Delta_\infty$ situé à l'infini.

Ces deux points doivent être considérés comme distincts, et, si l'on appelle D la droite définie par les semi-droites Δ et $-\Delta$, on voit que D renferme deux points situés à l'infini, à savoir Δ_∞ et $-\Delta_\infty$.

Nous considérerons les points à l'infini comme situés sur une conique infiniment aplatie et ayant pour sommets les ombilics du plan, et, pour plus de clarté, j'appellerai le point Δ_∞ un *semi-point*, en sorte que la *conique de l'infini* sera le lieu des semi-points du plan.

Un *point* de la *droite de l'infini* doit être considéré comme la réunion de deux semi-points opposés.

Si l'on imagine un cycle variable qui touche constamment deux semi-droites Δ et Δ', ce cycle, lorsque son centre est rejeté à l'infini, se réduit aux deux semi-points Δ_∞ et Δ'_∞.

Un semi-point peut être considéré comme une courbe

---

[1] En général, D désignant une semi-droite quelconque, j'appellerai — D la semi-droite opposée.

de direction de la classe un; il n'y a du reste pas d'autre courbe de direction qui soit de cette classe.

Les courbes de direction de la deuxième classe ne comprennent que les cycles; je me propose, dans cette Note, d'étudier les courbes de direction de la troisième classe.

2. Soit μ le nombre des tangentes que l'on peut mener à une courbe de direction de la troisième classe et parallèlement à une semi-droite donnée; comme on peut lui mener également μ tangentes parallèles à la semi-droite opposée, il résulte de là que, par un point de la droite de l'infini, on peut mener à la courbe 2μ tangentes distinctes de cette droite. En désignant par ρ le nombre des points de contact de la droite de l'infini et de la courbe, on a donc

$$2\mu + \rho = 3,$$

et, comme ρ ne peut être égal à 3, il en résulte $\rho = 1$ et $\mu = 1$.

Ainsi la courbe considérée touche la droite de l'infini; une semi-droite isotrope coïncidant avec son opposée, on voit en outre que les deux tangentes (distinctes de la droite de l'infini) que l'on peut, d'un ombilic du plan, mener à la courbe, sont confondues; la courbe passe donc par les deux ombilics.

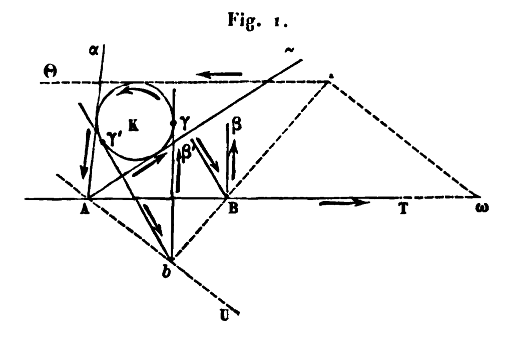
3. Il est clair qu'on ne peut mener à une courbe de direction de la troisième classe qu'une seule tangente T parallèle à une semi-droite donnée. Traçons dans le plan un cycle arbitraire K et menons à ce cycle une tangente Θ parallèle à T; je dirai que cette tangente est l'image de T. Si l'on imagine un nombre quelconque de tangentes à la courbe considérée et si l'on mène tangentiellement à K des tangentes parallèles, ces dernières (ou si

l'on veut encore leurs points de contact) formeront l'image des tangentes à la courbe. On voit qu'une tangente à la courbe est déterminée quand on se donne son image sur le cycle K.

4. Considérons une courbe de direction de la troisième classe H et une tangente quelconque T à cette courbe. Par chaque point de cette semi-droite, on peut mener à la courbe deux tangentes distinctes de T; soient αA et Aα' les tangentes issues d'un point quelconque A de T. Inscrivons dans ces deux semi-droites un cycle quelconque K sur lequel nous ferons l'image des tangentes à H.

Soit B un autre point quelconque de T; désignons par Bβ et β'B les tangentes issues de ce point et soient γb et $\gamma' b$ leurs images sur le cycle fixe K. Il est clair que si l'on se donne la semi-droite $b\gamma$, la tangente Bβ est détermi-

Fig. 1.



née et, par suite, le point B ainsi que la deuxième tangente Bβ' et son image $b\gamma'$. Des deux tangentes au cycle K, $b\gamma$ et $b\gamma'$, l'une étant déterminée quand on se donne l'autre, il en résulte qu'elles forment un système en involution et que leur point de rencontre b décrit une droite du plan. Cette droite U passe du reste par le point A, puisque les tangentes Aα et Aα' se confondent avec leurs images.

A chaque point B de la droite T correspond un point b de la droite U; les points B et b déterminent donc sur ces droites des divisions homographiques et, comme le point A se correspond évidemment à lui-même, on en conclut que la droite Bb passe par un point fixe du plan.

Pour déterminer la position de ce point fixe, je remarquerai que, si le point B s'éloigne à l'infini sur la tangente T, l'une des tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe est la tangente opposée à T. Si donc nous menons au cycle K la tangente Θ anti-parallèle à T, le point b est situé sur cette semi-droite et la droite bB se confond avec Θ qui, par suite, contient le point fixe cherché.

Soit P ce point fixe; par ce point menons une droite parallèle à U et coupant T au point ω. Le point ω' où Pω rencontre U étant situé à l'infini, les tangentes menées de ω' au cycle K sont opposées et ont pour directions celles déterminées par la droite Pω; il résulte donc de ce qui précède que les tangentes issues de ω sont les deux semi-droites opposées déterminées par la droite Pω, qui est ainsi *une tangente double apparente de la courbe*.

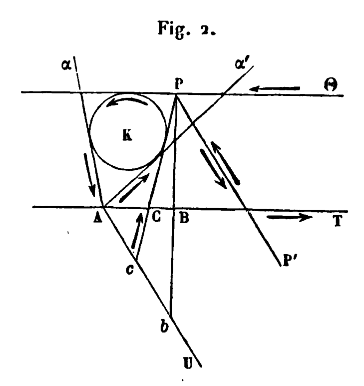
Ainsi la courbe de direction de la troisième classe la plus générale passe par les ombilics du plan, touche la droite de l'infini et a une tangente double apparente; c'est donc un hypercycle cubique, ou, en d'autres termes, une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

5. La proposition que je viens de démontrer peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Considérons une tangente quelconque T à un hypercycle cubique H; d'un point A, pris arbitrairement sur cette semi-droite, menons les deux tangentes à la courbe

$A\alpha$ et $A\alpha'$ qui sont distinctes de T, puis inscrivons dans ces semi-droites un cycle quelconque K.

Fig. 2.



Menons à ce cycle la tangente Θ anti-parallèle à T et soit P le point où cette tangente rencontre la tangente double PP′ de la courbe; soit de plus AU la droite menée par A parallèlement à P.

Cela posé, *si, par le point fixe* P, *on mène une sécante arbitraire coupant respectivement* T *et* U *aux points* B *et* b, *les tangentes que l'on peut mener à l'hypercycle par le point* B *sont parallèles aux tangentes menées du point* b *au cycle* K.

6. Par le point P menons au cycle K la tangente PCc qui est distincte de Θ; il est clair, d'après la proposition précédente, que cette semi-droite est également tangente à l'hypercycle, et qu'en faisant varier le cycle K, qui est assujetti à la seule condition de toucher les tangentes $A\alpha$ et $A\alpha'$, on obtiendra ainsi toutes les tangentes à la courbe.

Remarquons maintenant que le cycle qui touche à la fois les tangentes $A\alpha$, $A\alpha'$, PC est précisément le cycle K, que celui qui touche PC et les deux tangentes opposées PP′ et P′P se réduit au point P; enfin que, des

deux tangentes communes à ces cycles, l'une est C et l'autre la semi-droite Θ dont la direction reste constante, quelle que soit la tangente PC considérée; nous pourrons alors énoncer la proposition fondamentale suivante :

Théorème I. — *Soient* A, A′ *et* B, B′ *deux couples de tangentes à un hypercycle cubique* H *et* T *une tangente quelconque à cette courbe; construisons les deux cycles qui touchent respectivement* A, A′ *et* T, B, B′ *et* T; *ces deux cycles ont* T *pour tangente commune, la seconde tangente commune* Θ *est parallèle à une semi-droite fixe.*

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cubique en une courbe de même espèce et que l'on peut toujours effectuer la transformation de telle sorte que les tangentes B et B′ se transforment en une tangente double apparente de la courbe transformée; auquel cas le théorème résulte immédiatement des remarques qui précèdent.

6. Le théorème précédent donne une propriété remarquable de *six tangentes quelconques* à un hypercycle. En voici d'autres conséquences :

Etant donnés deux couples de semi-droites fixes A, A′ et B, B′ et une direction fixe Θ_0, menons une semi-droite quelconque Θ parallèle à Θ_0, puis construisons les cycles qui touchent respectivement A, A′ et Θ, B, B′ et Θ. Ces cycles, qui touchent Θ, ont en outre une deuxième tangente commune T; cette tangente, lorsque Θ se déplace parallèlement à elle-même, enveloppe un hypercycle cubique tangent à A, A′, B et B′.

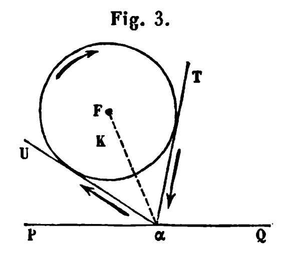
Si l'on fait varier la direction Θ_0, on déterminera

ainsi tous les hypercycles cubiques qui touchent les quatre semi-droites A, A′, B et B′.

7. Comme application, supposons que les tangentes A et A′ soient les tangentes isotropes issues du foyer F de la courbe et que les tangentes B et B′ soient les semi-droites opposées définies par la tangente double apparente PQ.

En désignant par T une tangente quelconque à l'hypercycle, on voit que le cycle, qui touche T et les droites isotropes issues de F, est le cycle K qui a précisément

Fig. 3.



F pour centre; le cycle qui touche T, B et B′ se réduit au point de rencontre α de T et de PQ. La seconde tangente commune à ces deux cycles est la semi-droite U qui est l'antisymétrique de T par rapport à la droite αF.

On peut donc énoncer la proposition suivante, qu'il serait très facile du reste de démontrer directement :

Un hypercycle ayant pour foyer le point F *et pour tangente double la droite* PQ, *si* α *désigne le point où une semi-droite quelconque* T *tangente à la courbe coupe la droite* PQ, *l'antisymétrique de* T *relativement à la droite* Fα *a une direction constante.*

II.

8. Étant données quatre semi-droites quelconques A_1, A_2, A_3 et A_4, construisons les bissectrices (A_1, A_2),

(A_1, A_3), (A_1, A_4) [1]; les foyers des paraboles qui touchent ces trois droites sont les foyers des hypercycles cubiques qui touchent les semi-droites données; on sait d'ailleurs, par un théorème connu, que le lieu des foyers de ces paraboles est le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois bissectrices.

Ainsi le lieu des foyers des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données est un cercle K, et, comme il est facile de le voir, ce cercle est celui qui contient les centres des quatre cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former avec les semi-droites données en les prenant trois à trois.

Soient K_1, K_2 et K_3 trois de ces cycles et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ leurs centres; F désignant le foyer de l'un quelconque H des hypercycles qui touchent les semi-droites données A_1, A_2, A_3 et A_4, il résulte de ce qui précède que F, α_1, α_2 et α_3 sont situés sur le cercle K.

En d'autres termes, si l'on appelle I et J les deux ombilics du plan, le rapport anharmonique des semi-droites FI, α_1I, α_2I et α_3I est égal au rapport anharmonique des semi-droites FJ, α_1J, α_2J et α_3J; ce que l'on peut encore énoncer de la façon suivante :

Si l'on mène à l'hypercycle H et aux cycles K_1, K_2 et K_3 des tangentes parallèles à une droite isotrope d'un système, puis des tangentes parallèles à une droite isotrope de système différent, les deux systèmes de semi-droites ainsi obtenues ont même rapport anharmonique.

Remarquons maintenant qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cu-

---

[1] Je rappelle que je désigne par la notation (C, D) la bissectrice de deux semi-droites données C et D, c'est-à-dire la *droite parfaitement déterminée* qui est le lieu des centres des cycles qui touchent ces semi-droites.

bique en une courbe de même espèce, que le rapport anharmonique de quatre semi-droites parallèles se conserve après la transformation et que la transformation peut toujours être choisie de façon que deux semi-droites prises arbitrairement aient pour transformées des droites isotropes : nous en conclurons immédiatement que la proposition précédente subsiste pour des directions quelconques prises dans le plan.

D'où le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Soient* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *quatre semi-droites et* K_1, K_2, K_3 *les cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former en adjoignant successivement à* A_4 *deux quelconques des semi-droites* A_1, A_2 *et* A_3 ; *soit de plus* H *un hypercycle cubique quelconque qui touche les semi-droites données. Cela posé, si l'on mène à la courbe et aux trois cycles des tangentes parallèles à une direction quelconque, le rapport anharmonique de ces quatre semi-droites est constant.*

On peut encore l'énoncer ainsi qu'il suit :

THÉORÈME III. — *Étant donnés trois cycles qui touchent une même semi-droite* Δ, *si une semi-droite* T *se déplace de telle sorte que le rapport anharmonique de cette semi-droite et des tangentes, menées aux trois cycles dans une direction parallèle, ait une valeur constante* k, T *enveloppe un hypercycle cubique tangent à* Δ *et aux trois semi-droites qui touchent à la fois deux des cycles donnés* (¹).

Remarque. — En faisant varier le nombre k, on dé-

(¹) Si les trois cycles donnés n'étaient pas tangents à une même semi-droite, l'enveloppe de T serait un hypercycle de la quatrième classe ; je reviendrai sur ce sujet.

terminera ainsi tous les hypercycles qui touchent les quatre semi-droites dont je viens de parler.

9. Considérons le faisceau des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données A_1, A_2, A_3 et A_4. Soient Δ et Δ' deux semi-droites prises arbitrairement; à chacune des courbes du faisceau on peut circonscrire un angle, et un seul, dont les côtés soient parallèles à Δ et à Δ'; il résulte de ce qui précède que *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à* Δ *et à* Δ'.

En particulier, quand les semi-droites Δ et Δ' viennent à se confondre, on obtient la proposition suivante :

Si, à chacune des courbes du faisceau, on mène une tangente parallèle à une semi-droite donnée Δ, *le lieu du point de contact est une parabole dont l'axe est parallèle à* Δ.

III.

10. L'étude des courbes de direction de la troisième classe se rattache à un autre genre de considérations d'une grande importance dans la théorie générale des courbes de direction.

Étant donnée dans un plan fixe une droite quelconque D, on peut, par cette droite, mener deux plans isotropes qui sont distincts si la droite n'est pas elle-même une droite isotrope; nous rattacherons respectivement ces deux plans aux deux semi-droites Δ et $-\Delta$ déterminées par la droite D.

Ainsi, par toute semi-droite du plan, passera *un plan isotrope parfaitement déterminé*. Cela posé, étant donnée une courbe quelconque de direction K, si l'on imagine les divers plans isotropes qui contiennent les tangentes à cette courbe, ces plans envelopperont une

surface Σ; en d'autres termes, si l'on considère la *développable isotrope* [1] *complète* qui est circonscrite à K, cette développable se décompose en deux surfaces distinctes qui correspondent à K et à la courbe qui lui est opposée.

11. Il résulte de là que la classification des courbes planes de direction se ramène à la classification des surfaces développables isotropes.

Étant donnée une surface développable isotrope Σ de classe r, tout plan sécant P la coupe suivant une courbe de direction K qui est de la même classe. Je ferai remarquer en outre qu'en désignant par Θ l'arête de rebroussement de Σ la projection orthogonale de Θ sur le plan P est la développée de la courbe K suivant laquelle le plan coupe la développable.

Les cônes isotropes qui ont pour sommets les divers points de Θ coupent le plan P suivant les cycles osculateurs de la courbe K.

12. On voit, en particulier, que l'étude des courbes de direction de la troisième classe se ramène à celle des développables isotropes de troisième classe et ces courbes sont toutes de la même espèce, puisqu'il n'y a qu'une seule espèce de développables de la troisième classe.

Soient Θ une cubique gauche isotrope et Σ la développable isotrope dont elle est l'arête de rebroussement; on voit que toute section plane de Σ est un hypercycle cubique (en d'autres termes, une anticaustique par ré-

---

[1] J'appelle *développable isotrope* une surface développable dont toutes les génératrices sont des droites isotropes et dont, par suite, les plans osculateurs sont des plans isotropes. *Voir*, à ce sujet, mon *Memoire sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XI; 1872).

Des considérations analogues à celles que je développe ici ont été employées par M. Stephanos dans diverses Communications orales faites à la *Société mathématique de France*.

flexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles); la projection orthogonale de Θ sur un plan quelconque est par suite une caustique de parabole.

13. Comme application, considérons un hypercycle cubique K; soient Σ la développable qui est l'enveloppe des plans isotropes, qui contiennent les diverses tangentes à l'hypercyle, et Θ la cubique gauche qui forme son arête de rebroussement.

Considérons trois tangentes quelconques A, B et C à l'hypercycle; désignons respectivement par a, b et c les points où elles touchent la courbe et par α, β et γ les points où les plans isotropes menés par A, B et C touchent la cubique Θ. Ces plans osculateurs de Σ se coupent en un point δ qui, d'après un théorème connu, est situé dans le plan déterminé par les trois points α, β et γ; soit T la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan P de l'hypercycle K.

Les cônes isotropes ayant respectivement pour sommets α, β et γ coupent le plan P suivant les trois cycles R_a, R_b et R_c qui osculent K aux points a, b et c, et l'axe de similitude de ces trois cycles est évidemment la droite T. Le cône isotrope ayant pour sommet le point δ a pour trace sur le plan P le cycle inscrit dans le triangle ABC et, comme le point δ est dans le plan $\alpha\beta\gamma$, il en résulte que le centre de similitude de ce cycle et de l'un quelconque des cycles R_a, R_b et R_c est situé sur T.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés trois points quelconques a, b, c d'un hypercycle cubique, si l'on imagine les cycles R_a, R_b et R_c qui osculent la courbe en ces points et le cycle R qui touche les tangentes menées en ces mêmes points, les six centres de similitude de ces quatre cycles considérés deux à deux sont sur une même droite.

14. On doit remarquer en particulier le cas où le plan, qui contient les points α, β et γ, est un plan isotrope; la proposition précédente peut alors s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés un hypercycle cubique K *et une semi-droite arbitraire* Δ *située dans son plan, il y a trois cycles osculateurs de* K *qui touchent* Δ. *Les tangentes menées aux points d'osculation et la semi-droite* Δ *sont tangentes à un même cycle.*

15. J'énoncerai encore le corollaire suivant :

Si, par un point quelconque P, *pris dans le plan d'un hypercycle cubique* K, *on mène des tangentes à la courbe et si l'on considère les trois cycles qui l'osculent aux points de contact, l'axe de similitude de ces trois cycles passe par le point* P.

VI.

Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe.

I.

1. L'hypercycle est la transformée, par semi-droites réciproques, de la parabole; c'est une courbe de direction de la quatrième classe et dont l'équation la plus générale, en coordonnées tangentielles et les axes étant rectangulaires, est de la forme

$$(\alpha u + \beta v + \gamma)^2 (u^2 + v^2) \\ = (A u^2 + 2 B uv + C v^2 + 2 D u + 2 E v)^2.$$

Ses propriétés les plus importantes sont les suivantes :

1° Les tangentes à la courbe peuvent être associées deux par deux, de telle sorte que deux tangentes conjuguées quelconques et deux semi-droites fixes (les semi-droites fondamentales de la courbe) forment un système harmonique ([1]).

2° L'enveloppe des conjuguées d'une semi-droite D, par rapport à tous les couples de tangentes conjuguées, est un cycle K que j'appellerai le cycle polaire de D.

Il est clair qu'un hypercycle est entièrement déter-

([1]) Deux couples de semi-droites forment un système harmonique, quand elles touchent un même cycle et que leurs points de contact partagent harmoniquement la circonférence.

Sur les propriétés mentionnées dans le texte, voir mon Mémoire sur les hypercycles (*Comptes rendus,* mars et avril 1882); dans toute la suite de cette Note, les renvois à ce Mémoire seront simplement indiqués par la lettre H.

miné quand on se donne les semi-droites fondamentales, une droite quelconque du plan et son cycle polaire.

3° Le cycle polaire d'une tangente touche cette tangente en son point de contact avec la courbe.

4° En désignant par A, A′ et B, B′ deux couples quelconques de tangentes conjuguées, si l'on considère une tangente mobile quelconque T et si l'on construit les cycles inscrits dans les triangles AA′T et BB′T, la longueur comprise sur T entre les points de contact est constante en grandeur et en signe (1).

2. Je rappellerai encore cette proposition importante :

A, B, C et D désignant les quatre tangentes communes à un cycle et à un hypercycle, si l'on considère les tangentes conjuguées C′ et D′ de deux quelconques d'entre elles C et D, les semi-droites A, B, C′ et D′ touchent un même cycle.

En voici quelques conséquences : étant prises arbitrairement cinq semi-droites P, Q, A, B, C du plan, il existe un hypercycle généralement bien déterminé pour lequel P et Q sont les semi-droites fondamentales et qui touche A, B, C.

Soient D la quatrième tangente que cette courbe a en commun avec le cycle inscrit dans le triangle ABC, et A′, B′, C′, D′ les conjuguées harmoniques de A, B, C, D relativement à P et à Q; il résulte de la proposition précédente que les semi-droites A, B, C′, D′ touchent un même cycle et il en est de même des semi-droites A, B′, C, D′ et des semi-droites A′, B, C, D′.

Les cycles inscrits dans les triangles ABC′, AB′C et A′BC touchent donc tous les trois la semi-droite D′; ce

(1) H, N° 14.

qui permet de déterminer la quatrième tangente commune D.

3. On peut encore énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne par (A, A'), (B, B'), (C, C') *trois couples de semi-droites formant une involution, les cycles inscrits dans les triangles* ABC', AB'C *et* A'BC *touchent une même semi-droite.*

Supposons, en particulier, que les semi-droites doubles de l'involution soient les droites isotropes passant par un point O du plan, deux semi-droites conjuguées sont alors symétriques par rapport au point O; d'où cette conclusion :

Si (A, A'), (B, B') *et* (C, C') *sont trois couples de semi-droites symétriques par rapport à un point* O *du plan, les cycles inscrits dans les triangles* ABC', AB'C *et* A'BC *touchent une même semi-droite.*

Le même théorème aurait encore lieu si la symétrie des couples avait lieu par rapport à une droite quelconque du plan.

II.

4. Une parabole peut être considérée comme un hypercycle et comme une courbe double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées. Ses semi-droites fondamentales sont les semi-droites opposées déterminées par l'axe de la courbe; il en résulte que deux tangentes conjuguées sont *symétriques* par rapport à l'axe.

Toutes les propriétés des hypercycles appartiennent donc à la parabole et constituent des propriétés nouvelles de cette courbe.

5. Transformons une parabole par semi-droites réciproques en prenant pour axe de transformation l'axe de la courbe elle-même ; il est clair que les semi-droites fondamentales de la transformée seront encore les semi-droites opposées déterminées par l'axe et que les tangentes conjuguées seront symétriques par rapport à cet axe.

Réciproquement tout hypercycle jouissant de la propriété, que deux tangentes conjuguées sont symétriques par rapport à une droite D, est la transformée d'une parabole P ayant cette droite pour axe ; l'axe de transformation est également D.

Un point quelconque M de la parabole a pour transformé un cycle K dont le centre décrit une parabole P′ ayant pour axe D, tandis que son rayon varie proportionnellement à sa distance à l'axe ; la transformée est donc une des anticaustiques par réfraction de la parabole P′, lorsque les rayons incidents sont perpendiculaires à l'axe.

Je la désignerai sous le nom d'*anticaustique principale*.

6. Ainsi les anticaustiques principales sont les hypercycles pour lesquels les semi-droites fondamentales sont opposées.

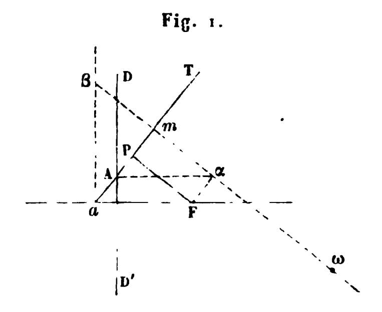
Considérons une telle courbe et soit F le point où une tangente isotrope coupe son axe, la tangente symétrique étant la seconde droite isotrope qui passe par ce point, on voit que F est le foyer de la courbe et que les droites isotropes, qui se croisent en ce point, forment un couple de tangentes conjuguées.

Menons une tangente parallèle à une direction perpendiculaire à l'axe, sa symétrique lui est opposée ; nous avons donc une tangente double apparente perpendiculaire à l'axe, et les deux semi-droites opposées qu'elle

détermine constituent également un couple de tangentes conjuguées.

Soient (*fig.* 1) une anticaustique principale ayant F pour foyer et DD′ comme tangente double, AT une tan-

Fig. 1.



gente quelconque à cette courbe. Les deux droites opposées DD′ et D′D formant un système de tangentes conjuguées, on voit que le cycle qui touche ces tangentes et la tangente AT se réduit au point A où cette tangente coupe DD′; son point de contact avec ce cycle est également le point A. D'autre part, le cycle qui touche les droites isotropes issues du point F et la tangente AT est le cycle qui a pour centre F; son point de contact avec AT est donc le pied P de la perpendiculaire abaissée du point F.

D'une proposition fondamentale énoncée plus haut, il résulte d'ailleurs, puisque les droites isotropes issues du point F constituent un système de tangentes conjuguées, que *la distance* AP *est constante en grandeur et en signe;* ainsi :

Toute anticaustique principale peut être considérée comme l'enveloppe d'un des petits côtés d'un triangle rectangle de forme invariable dont l'extrémité, située sur l'hypoténuse, décrit une droite, tandis que l'autre petit côté passe par un point fixe.

Les autres anticaustiques étant des courbes parallèles à l'anticaustique principale, on peut énoncer encore la proposition suivante :

Soit ABCD *un quadrilatère de forme invariable, dans lequel les deux angles* B *et* C *sont droits; si l'on déplace ce quadrilatère de façon que le côté* BC *passe par un point fixe* F *et que le sommet* A *décrive une droite* Δ, *le côté* CD *enveloppe une anticaustique d'une parabole ayant pour foyer le point* F, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe.*

7. La proposition que je viens de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Si, du foyer d'une anticaustique principale, on abaisse une perpendiculaire à une tangente à cette courbe, la distance Δ, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où la tangente rencontre la tangente double, est constante.

Plusieurs cas particuliers sont à remarquer : dans le cas où $\Delta = 0$, la courbe se réduit à une parabole; quand la tangente double passe par le foyer, la courbe a alors le foyer pour centre.

Enfin, quand Δ est égal à la distance du foyer à la tangente double (c'est le cas de la *réflexion*), la classe de la courbe s'abaisse et elle devient un *hypercycle cubique,* ou plus exactement elle se décompose en un hypercycle cubique et un semi-point situé à l'infini sur la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente double.

De là une propriété nouvelle de l'hypercycle cubique, que l'on peut énoncer ainsi :

Si des rayons, menés parallèlement à une direction quelconque, se réfléchissent sur une parabole, parmi

toutes les anticaustiques correspondantes, il y en a une qui a un axe de symétrie; si, du foyer de la parabole, on mène une perpendiculaire à une tangente quelconque à cette courbe, la distance, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où la tangente rencontre la tangente double, est constante et égale à la distance du foyer à cette tangente double.

8. Soit une anticaustique principale ayant pour foyer le point F et pour tangente double la droite DD′.

Considérons (*fig.* 1) une tangente AT à cette courbe et construisons le cycle polaire de cette semi-droite; nous savons qu'il lui est tangent. Il touche également la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux tangentes opposées DD′ et D′D, qui constituent un couple de tangentes conjuguées; le centre de ce cycle est donc sur la droite menée par le point A perpendiculairement à DD′. Ce cycle touche la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux droites isotropes issues du point F (ces droites forment en effet un couple de tangentes conjuguées); et, comme cette conjuguée est la symétrique de AT relativement au point F, le centre cherché est sur la droite menée par le point F parallèlement à AT.

Ce centre est donc le point α et, le cycle polaire d'une tangente touchant cette semi-droite en son point de contact avec la courbe, on voit que le point de contact de AT est le pied m de la perpendiculaire abaissée du point α.

On serait arrivé à ce résultat en considérant l'anticaustique comme l'enveloppe du côté d'un triangle rectangle de forme invariable dont un sommet A décrit la droite DD′ pendant que le côté PF passe par le point fixe F; il est clair, en effet, que le centre instantané de

rotation de la figure est le point α que j'ai déterminé précédemment.

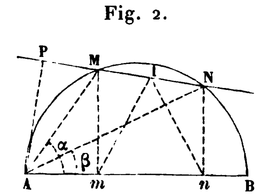
Pour construire le centre de courbure correspondant au point m (¹), je remarque que, la tangente conjuguée de AT étant la symétrique relativement à l'axe de la courbe, le cycle, qui touche l'anticaustique au point m et la conjuguée de AT, a son centre au point de rencontre de la normale $m\alpha$ avec la droite, menée parallèlement à DD', par le point a où la tangente AT rencontre l'axe.

En désignant par β ce point de rencontre, il résulte d'un théorème, que j'ai donné dans mon Mémoire sur les hypercycles, que le centre de courbure cherché est le point ω symétrique de β par rapport à α.

III.

9. Une anticaustique principale étant donnée, il im-

Fig. 2.



porte de construire la parabole sur laquelle se sont réfractés les rayons.

Pour la solution de cette question, je démontrerai d'abord quelques lemmes préliminaires. Un cercle étant décrit sur un segment AB comme diamètre (*fig.* 2), soient m et n les projections sur ce diamètre de deux

---

(¹) *Voir* H, n° 14.

points M et N de la courbe, et P la projection sur la droite MN de l'extrémité A du diamètre ; cela posé :

Lemme I. — On a l'égalité

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Pn}^2} = \frac{Bm}{Bn}.$$

Lemme II. — En désignant par I le milieu de la corde MN, on a

$$Im = In = IP;$$

en d'autres termes,

$$\overline{AP}^2 = Am.An.$$

10. Pour les démontrer, je remarque que l'angle APM étant droit, l'angle $\widehat{PAN}$ est égal à l'angle $\widehat{MAB}$; faisons, pour un instant,

$$\widehat{MAB} = \alpha, \quad \widehat{NAB} = \beta.$$

Les deux triangles PAN et NAn donnent

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Nn}^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\overline{Mm}^2.\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2.\overline{Nn}^2} = \frac{Am.Bm.An.AB}{Am.AB.An.Bn} = \frac{Bm}{Bn}.$$

En second lieu, le triangle APN donne

$$\overline{AP}^2 = \overline{AN}^2.\cos^2\alpha = \frac{\overline{AN}^2.\overline{Am}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{An.AB.Am^2}{Am.AB} = Am.An.$$

C. Q. F. D.

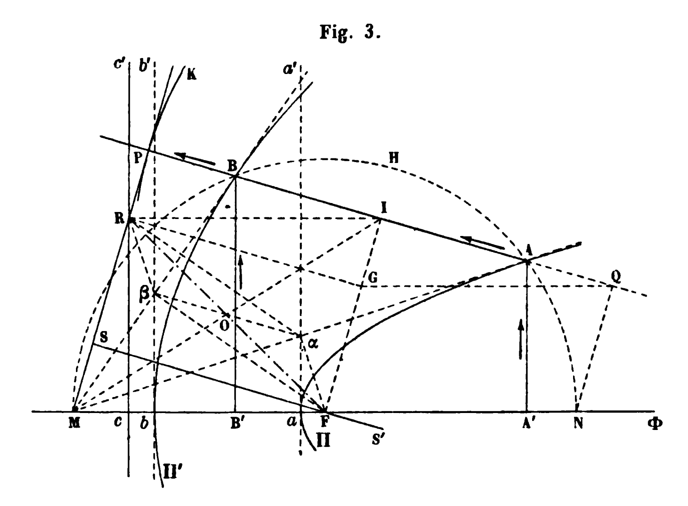
11. Considérons maintenant deux paraboles Π et Π′ (*fig.* 3) ayant le point F pour foyer et pour sommets respectifs les deux points *a* et *b* de la droite FΦ.

Par un point quelconque M de cette droite, menons une tangente à chacune des paraboles et soient respectivement A et B leurs points de contact ; on sait que le

cercle, ayant pour centre le foyer F et passant par le point M, contient les points A et B; j'appellerai N le point où il rencontre de nouveau l'axe F Φ.

Du point M abaissons une perpendiculaire MP sur la droite AB, et, par le point I milieu du segment AB, me-

Fig. 3.



nons une parallèle à l'axe qui rencontre MP au point R, il est clair que la figure MRIF est un parallélogramme.

Soient maintenant α et β les milieux respectifs des segments MA et MB; la droite $\alpha\beta$ est évidemment parallèle à AB et partagée en parties égales par la droite MI en son point milieu O; d'où il suit que la figure $R\beta F\alpha$ est un parallélogramme.

Ainsi les segments $R\beta$ et αF sont égaux et parallèles, c, b et a étant les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points R, β et α; on a donc

$$Fc = Fa + Fb;$$

d'où il résulte que Fc est constant et que, quand le point M varie, le point R décrit la droite cc'.

J'abaisse maintenant du point F la perpendiculaire FS sur la droite MP, du point R la perpendiculaire RG sur la droite FI et du point N la perpendiculaire NQ sur la droite AB; il est clair que RS est égal à FG, et encore à NQ, car il est aisé de voir que la figure GQFN est un parallélogramme.

Or, en désignant par A′ et B′ les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points A et B, il suit du lemme II que l'on a

$$\overline{NQ}^2 = \overline{RS}^2 = NA'.NB' = \frac{Fa.Fb}{4}.$$

D'où il suit que la longueur RS est constante lorsque le point M se déplace; nous avons ainsi un triangle rectangle RSF dont un petit côté passe constamment par le point F, tandis que l'autre petit côté est constant et que le sommet R décrit la droite cc'.

Il en résulte donc, d'après ce que j'ai démontré plus haut, que RS enveloppe une anticaustique principale de parabole; le centre instantané de rotation étant d'ailleurs évidemment le point I, la tangente RS touche son enveloppe au point P.

12. Soit K l'hypercycle symétrique enveloppé par RS; si, du point A comme centre, on décrit un cercle ayant AP pour rayon, il est clair que son enveloppe est la courbe K; or, il résulte du lemme I que l'on a

$$\frac{AP}{AA'} = \sqrt{\frac{NB}{NA'}} = \sqrt{\frac{Fb}{Fa}}.$$

D'où il suit que ce rapport est constant et que K est l'anticaustique principale de la parabole II, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe et le module de

réfraction étant

$$\sqrt{\frac{\overline{Fb}}{\overline{Fa}}}.$$

On démontrerait de même que K est l'anticaustique principale de la parabole II', les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe et le module de réfraction étant

$$\sqrt{\frac{\overline{Fa}}{\overline{Fb}}}.$$

13. Il est maintenant facile de résoudre le problème suivant :

Un hypercycle K est l'enveloppe du côté RS d'un triangle rectangle RSS', dont le côté SS' passe constamment par le point fixe F (*fig.* 3), dont le côté RS a une longueur constante et dont le sommet R décrit la droite *cc'*; trouver les paraboles pour lesquelles cette courbe est une anticaustique principale.

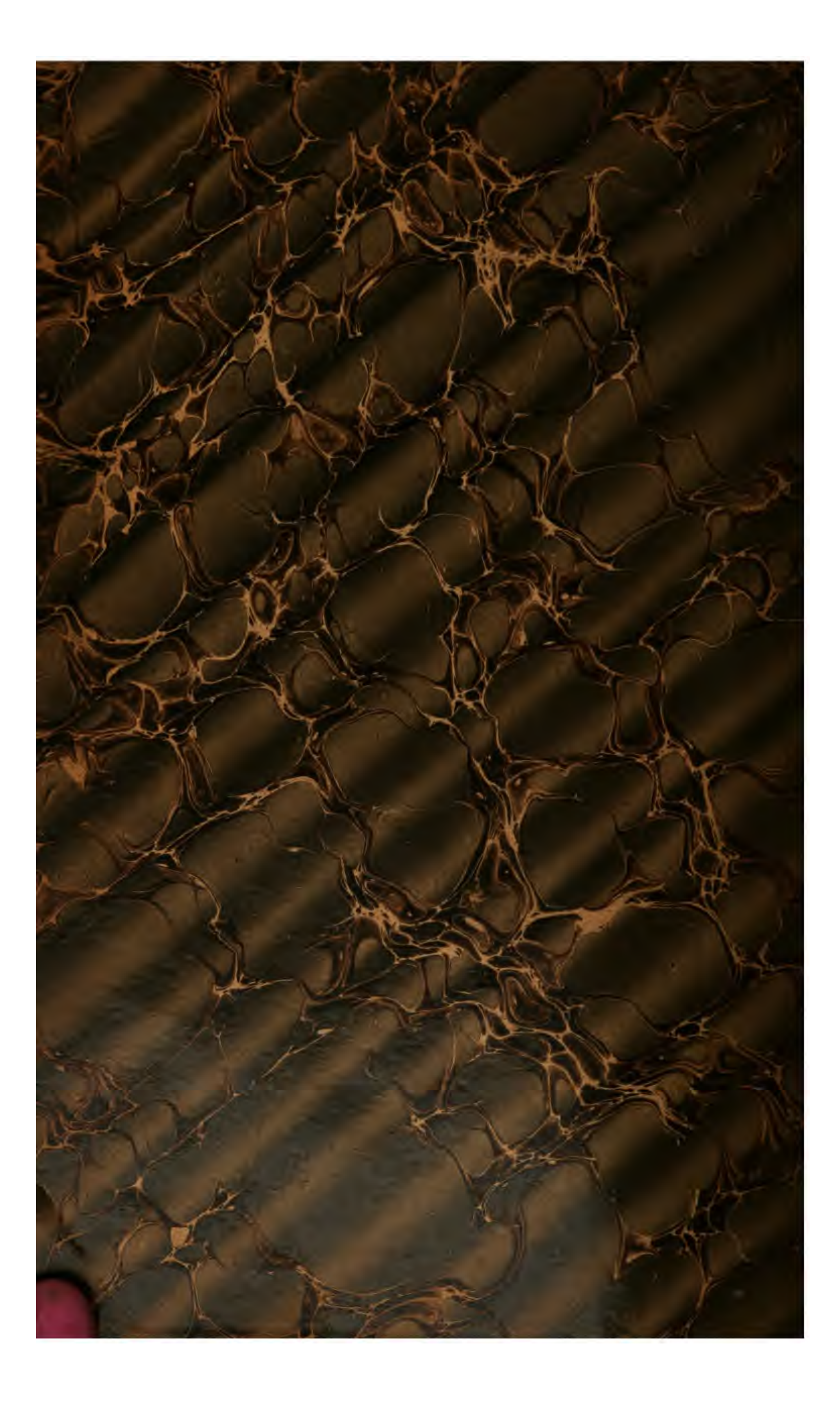
A cet effet, que du point F on abaisse une perpendiculaire à *cc'* rencontrant le côté RS en M, et que de ce même point comme centre on décrive un cercle H passant par M; que l'on détermine le point de rencontre I de la droite menée par F perpendiculairement à SS' et de la droite menée par R perpendiculairement à *cc'*, puis que par I on mène une droite Δ parallèle à SS'. Cela posé, si l'on imagine les deux paraboles qui, ayant F pour foyer et ayant leur axe perpendiculaire à *cc'*, passent respectivement par les points de rencontre de Δ et du cercle H, on obtiendra les deux paraboles pour lesquelles K est une anticaustique principale.

Il est à remarquer que ces deux paraboles ne sont pas toujours réelles; elles seront imaginaires si la droite Δ et le cercle H ne se rencontrent pas.

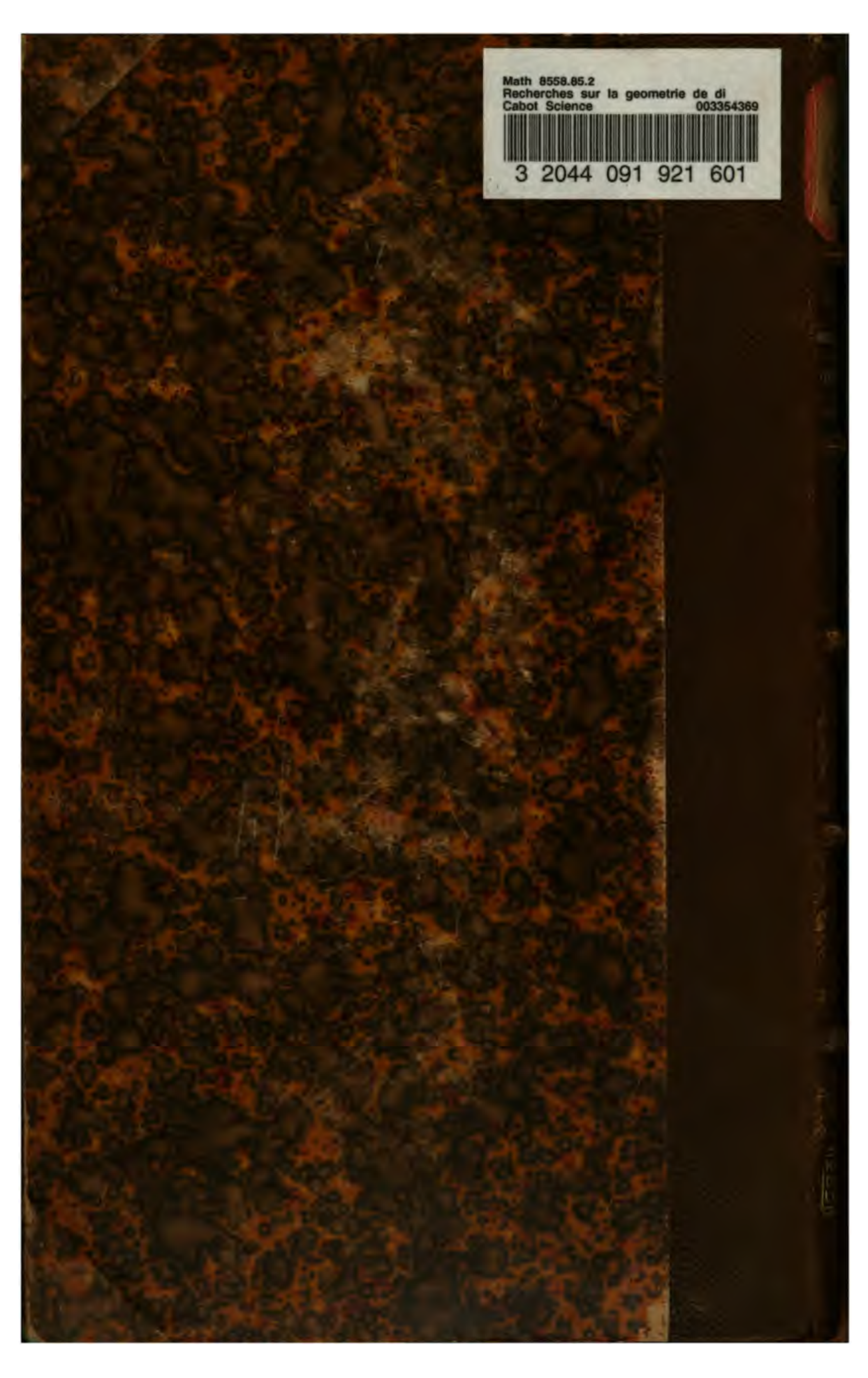
TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

8681 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.






Math 8558.85.2
Recherches sur la geometrie de di
Cabot Science 003354369
3 2044 091 921 601